

# Introducción al análisis de datos funcionales. Aplicación en Biomecánica

Miriam Francisca Ortega Gutiérrez  
Jorge Washington Congacha Aushay



ESPOCH  
2022

**Introducción al análisis de datos funcionales.  
Aplicación en Biomecánica**

---

# Introducción al análisis de datos funcionales. Aplicación en Biomecánica

---

Miriam Francisca Ortega Gutiérrez  
Jorge Washington Congacha Aushay



**Introducción al análisis de datos funcionales.**

**Aplicación en Biomecánica**

© 2022 Miriam Francisca Ortega Gutiérrez

Jorge Washington Congacha Aushay

© 2022 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½  
Instituto de Investigaciones  
Dirección de Publicaciones Científicas  
Riobamba, Ecuador  
Teléfono: 593 (03) 2 998-200  
Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego  
(*peer review*)

Corrección y diseño:  
La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio,  
sin la previa autorización por escrito de los propietarios del  
*Copyright*

CDU: 001.8 + 531

Introducción al análisis de datos funcionales.

Aplicación a la Biomecánica

Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Dirección de Publicaciones, año 2022

125 pp. vol: 17,6 x 25 cm

ISBN: 978-9942-42-645-1

1. Análisis de datos
2. Mecánica general
3. Biomecánica

## ÍNDICE GENERAL

Introducción .....	9
Capítulo I. Generalidades.....	12
1.1 ¿Qué es realmente fda? .....	12
1.2 Descripción de las aplicaciones biomecánicas.....	17
1.3 Nota histórica de la biomecánica .....	22
Capítulo II. Datos funcionales de la biomecánica .....	24
2.1 Sistemas de coordenadas global y local (GCS y LCS). Posición durante el ciclo de caminar.....	26
2.2 Cinemática plana o en 2-D.....	29
2.2.1 Marcadores para la recolección de datos biomecánicos.....	29
2.2.2 Cinemática lineal .....	35
2.2.3 Cinemática angular .....	37
2.3.1 Sistemas de coordenadas y el supuesto de segmentos rígidos .....	45
2.3.2 Transformaciones de sistemas de coordenadas .....	47
2.3.3 LCS para segmentos de la extremidad inferior.....	49
2.3.4 LCS para la pelvis .....	50
2.3.5. LCS para el muslo .....	52
2.3.6. LCS para la pierna o vástago.....	53
2.3.7 Ángulos de articulación .....	62
2.3.8 Datos funcionales de la biomecánica: velocidad angular y aceleración angular según cardano .....	73
Capítulo III Principales técnicas de FDA en biomecánica.....	76
3.1 Suavización de curvas (datos biomecánicos).....	79
3.1.1 Suavizado polinomial .....	82
3.1.2 Medias móviles.....	83
3.1.3 Transformada de fourier .....	84
3.1.4 <i>Splines</i> .....	86
3.2 Análisis exploratorio de datos biomecánicos .....	88
3.3 Análisis en componentes principales funcionales (FPCA) .....	90
3.3.1 PCA multivariante .....	93

3.3.2 PCA funcional, FPCA.....	100
Capitulo IV. Revisión de publicaciones con aplicaciones de FDA en biomecánica.....	105
4.1 <i>Functional data analysis of knee joint kinematics in the vertical     jump.</i> (Análisis de datos funcionales en la cinemática de la articulación de la rodilla en el salto vertical) .....	105
4.2 <i>Functional data analysis of running kinematics in chronic     achilles tendon injury.</i> (Análisis de datos funcionales de la cinemática de la marcha en la lesión crónica del tendón de Aquiles) .....	106
4.3 Aplicación del análisis de datos funcionales a la caracterización de la función articular del cuello (FDART). .....	107
4.4 <i>Applications of functional data analysis in sport biomechanics.</i> (Aplicaciones del análisis de datos funcionales en biomecánica deportiva) .....	109
4.5 <i>Functional data analysis of aging curves in sports.</i> (Análisis de datos funcionales de curvas de envejecimiento en deportistas) .....	110
4.6 <i>Functional data analysis as an alternative for the automatic     biometric image recognition: iris application.</i> (Análisis de datos funcionales como alternativa para el reconocimiento automático de imágenes biométricas: aplicación en el iris).....	111
4.7 Análisis multivariado de datos funcionales aplicado a curvas de encefalogramas .....	113
4.8 <i>Considerations for the use of functional principal components     analysis in sports biomechanics: examples from on-water rowing.</i> (Consideraciones para el uso del análisis funcional de componentes principales en biomecánica deportiva: ejemplos del remo en el agua) .....	114
Conclusiones .....	116
Glosario .....	117
Bibliografía .....	120

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1. Variaciones explicada y explicada acumulada. ....	97
--	----

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Dato funcional en tiempos discretos.....	16
Figura 1.2. Posición anatómica del cuerpo humano para el análisis de posición durante el ciclo de caminar. ....	23
Figura 2.1. Esquema de datos funcionales biomecánicos: desplazamiento, velocidad y aceleración. ....	25
Figura 2.2. Sistema de coordenadas global, GCS diestro. ....	26
Figura 2.3. Sistema de coordenadas local LCS, dentro del sistema de coordenadas global GCS. ....	27
Figura 2.4. Grados de libertad DOF en un GCS.....	28
Figura 2.5. Marcadores utilizados en la recolección de datos biomecánicos con sistemas de imagen. ....	30
Figura 2.6. Comparación del método del factor de escala .....	32
Figura 2.7. Esquema de la posición durante el ciclo de caminar bidimensional, 2-D .....	33
Figura 2.8. Marcadores de un corredor y un ciclista. ....	34
Figura 2.9. Marcadores en las articulaciones. ....	34
Figura 2.10. Historial de la aceleración vertical del marcador del dedo pulgar .....	36
Figura 2.11. Regla de la mano derecha para definir direcciones rotacionales.....	38
Figura 2.12. Dos convenios para definir ángulos absolutos de segmentos.....	39
Figura 2.13. Ejemplos de ángulos absolutos de la extremidad inferior. ....	39
Figura 2.14. Ángulos absolutos y relativos .....	40
Figura 2.15. Coordenadas polares $(r,\theta)$ y cartesianas. $(x, y)$ para un reloj de manecillas. ....	41
Figura 2.16. El punto P se expresa como $(x, y)$ o como $(r,\theta)$ . ....	41
Figura 2.17. Articulaciones y segmentos rígidos de las extremidades inferiores.....	44
Figura 2.18. GCS y LCS, con vectores unitarios,.....	46
Figura 2.19. GCS y LCS, de la extremidad inferior derecha.....	46
Figura 2.20. A definido por P en XYZ, y por P' en x'y'z'.....	48
Figura 2.21. El origen ( $\vec{O}_{PELVIS}$ ), las espinas ilíacas superiores derecha e izquierda ( $\vec{P}_{RASIS}$ y $\vec{P}_{LASIS}$ y las espinas ilíacas posterior-superiores ( $\vec{P}_{RPSIS}$ y $\vec{P}_{LPSIS}$ ).....	50
Figura 2.22. El origen del LCS del muslo ( $\vec{O}_{RTHIGH}$ ), ( $\vec{P}_{RHIP}$ ) y los epicondilos femorales laterales y mediales ( $\vec{P}_{RLK}$ y $\vec{P}_{RMK}$ ).....	53

Figura 2.23. El origen ( $\vec{O}_{RSHANK}$ ), los epicóndilos laterales y mediales ( $\vec{P}_{RLK}$ y $\vec{P}_{RMK}$ ) y el punto medio del maléolos lateral y medial ( $\vec{P}_{RLA}$ y $\vec{P}_{RMA}$ ).....	54
Figura 2.24. El origen LCS del pie ( $\vec{O}_{RFOOT}$ ). Las posiciones de los maléolos ( $\vec{P}_{RLA}$ y $\vec{P}_{RMA}$ ) y las cabezas metatarsianas primera y quinta ( $\vec{P}_{RMH1}$ y $\vec{P}_{RMH5}$ ).....	56
Figura 2.25. Tres marcadores: $\vec{O}_{TCS}$ , $\vec{P}_{RLK}$ y ( $\vec{P}_{RTH}$ ). El origen ( $\vec{O}_{TCS}$ ) y un marcador virtual ( $\vec{R}_{VRMK}$ ).....	58
Figura 2.26. Relación entre GCS y LCS. Representación de marcadores $P_1$ , $P_2$ , y $P_3$ en GCS (XYZ) y $P'_1$ , $P'_2$ , y $P'_3$ en el LCS ( $\hat{i}'$ , $\hat{j}'$ , $\hat{k}'$ ).....	60
Figura 2.27. Sistema de coordenadas yz cuando se gira a y'z' en un ángulo $\phi$ , determina la transformación del vector $\vec{P}$ en $\vec{P}'$ .....	62
Figura 2.28. Serie de ángulos de rotaciones Cardano XYZ (a) primero sobre el eje $x^1$ $\alpha$ , (b) sobre el nuevo eje $y^1$ $\beta$ y (c) el eje $z^2$ $\gamma$ .....	65
Figura 2.29. Ángulo de articulación de la rodilla en relación con el muslo.....	65
Figura 2.30. JCS de la rodilla. El eje vertical $\hat{k}$ del LCS de la pierna; el eje mediolateral $\hat{i}$ - del muslo, y su eje flotante.....	68
Figura 2.31. Eje helicoidal ( $\vec{n}$ ) de los puntos $P_1$ y $P_2$ .....	70
Figura 3.1. Señal de muestreo a 100 Hz.....	77
Figura 3.2. Características de una señal senoidal.....	78
Figura 3.3. Señal con ruido y sin ruido.....	81
Figura 3.4. Suma de ondas senoidales de 2 Hz y 20 Hz en un periodo de 2,5 s.....	84
Figura 3.5. Ejemplo de ángulo de flexión.....	91
Figura 3.6. Forma de onda del momento de aducción para cuatro sujetos.....	92
Figura 3.7. Puntuación de PC para sujetos con OA y los sujetos sin OA.....	98
Figura 3.8. Comparaciones de puntuaciones de componentes principales PC.....	99
Figura 3.9. Componentes principales funcionales de abducción aducción para el movimiento de las piernas.....	100
Figura 3.10. Gráfico <i>Scree</i> de FPC.....	101
Figura 3.11. Visualización de FPC.....	103
Figura 4.1. Diagrama general de FDA para la tarea de reconocimiento de imágenes.....	112

## INTRODUCCIÓN

El análisis de datos funcionales (FDA, por sus siglas en inglés, *functional data analysis*) será el eje central de este texto. Se presenta una introducción matemática-estadística al FDA con aplicación a la biomecánica. Además, se abordan conocimientos dirigidos a la identificación, presentación y descripción de las funciones generadas por el movimiento humano durante el ciclo de caminar. La exposición de datos funcionales biomecánicos, así como los procedimientos estadísticos, ejemplos y gráficos presentados proceden del estudio del texto *Research Methods in Biomechanics* (Robertson et al., 2014), el cual se encuentra publicado solo en inglés. Pero también se pueden considerar, para el análisis de datos simulados y/o reales, bases disponibles como las del *package* «FDS, Functional Data Sets».

Aunque FDA es una disciplina relativamente nueva, es un campo de investigación en crecimiento. Se ocupa de la descripción estadística y la modelización de datos funcionales. Se han desarrollado varias aplicaciones en diferentes ciencias como genética. En medicina, se ha utilizado en estudios relacionados con la cirrosis hepática y en la evaluación de terapias antivirales contra el sida. Otras aplicaciones se aprecian en geología, psicología, economía, biomecánica, etc.

A pesar del aumento del FDA en varios campos de las ciencias, sus métodos han sido recientemente introducidos en el campo del procesamiento de imágenes. Se puede considerar una imagen como una representación de una observación física, una función sobre un dominio espacial. Por lo tanto, las imágenes se pueden ver como funciones de dos variables, donde cada coordenada ( $x = \text{fila}$ ,  $y = \text{columna}$ ) de la matriz de píxeles es una muestra tomada de tonos grises e intensos. Encontrar la función que se aproxima a los datos discretos observados es una de las cuestiones clave del FDA.

El ciclo de caminar del ser humano se puede representar por imágenes que contienen los pasos esenciales del procesamiento que se analizarán con FDA.

Este texto propone un esquema basado en FDA, un enfoque para representar imágenes que se utilizarán en el análisis biomecánico. Está dividido en cuatro capítulos.

En el primero, se presentan generalidades del análisis de datos funcionales y la biomecánica, empezando con una introducción de la técnica FDA para estudiar información determinada del ciclo de caminar del ser humano. Se describe una breve nota histórica y alguna terminología necesaria en un glosario sucinto, entre otros aspectos no menos importantes cuyo propósito es justificar la aplicación de las técnicas de FDA específicamente con los datos biomecánicos que describen las curvas obtenidas durante el ciclo de caminata humana. Estos son claramente funcionales. Sin embargo, al realizar un estudio continuo mediante el análisis de medidas estándares de las funciones como cálculo de máximos, mínimos, se pierde información. Pero con FDA, la unidad básica de información es la función o una curva, en lugar de un conjunto de observaciones individuales. Esto permite el análisis de algunas características funcionales como suavidad, monotonía y las derivadas de estas, que ayudarán ampliar el estudio. Además, la representación funcional es una forma natural de reducir la dimensionalidad de los datos, que a menudo se logra mediante FDA.

En el segundo capítulo, se desarrolla una descripción matemática de datos biomecánicos que aparecen en la cinemática de la posición angular durante el ciclo de caminar, a partir de los cuales, por derivación, se determinan velocidades y aceleraciones angulares y ángulos articulares considerando cadera, rodilla y tobillo. El fin es describir ecuaciones de las variables o datos funcionales de desplazamiento, velocidad y aceleración de la posición durante la caminata tanto lineal como angular de la cinemática plana o espacial.

En el tercer capítulo, se presentan las principales técnicas de FDA que se pueden aplicar a los datos biomecánicos, que toman en cuenta ruido en las señales recopiladas de las trayectorias de los marcadores colocados en las extremidades inferiores. Concretamente, se describen algunas técnicas de suavización de curvas, comenzando en este apartado con aquellas de procesamiento de señales y finalizando con el suavizado mediante *splines* cúbicos, que es una técnica muy útil para transformar datos discretos en datos funcionales. Luego se realiza un análisis exploratorio y se considera además el método del análisis en componentes principales funcionales, del inglés *functional principal component analysis* (FPCA). Esta técnica es la más utilizada para explicar la variabilidad, la reducción de dimensión de espacios donde se exponen los datos biomecánicos definidos como funciones o curvas.

Se presenta el cuarto capítulo denominado revisión de publicaciones con aplicaciones del FDA en biomecánica, el cual, para su desarrollo, toma en cuenta una introducción a cada trabajo, dejando claro cuál es el objetivo, qué tipo de datos

biomecánicos se analizan y qué técnicas del FDA se usan para alcanzar los resultados de cada publicación científica. El objetivo del capítulo es presentar una lista de resúmenes de trabajos que toman en cuenta las principales técnicas de FDA con aplicaciones en biomecánica.

Finalmente, se presenta una lista de referencias bibliográficas consultadas para el desarrollo de este texto de investigación.

# CAPITULO I GENERALIDADES

En este capítulo, se indican aspectos generales como una introducción al FDA aplicado a la biomecánica. Con esto se da respuesta a la pregunta ¿qué es realmente FDA? Se realiza una aplicación a una actividad común y real de una persona que llega a su casa, luego de laborar en su oficina. Finalmente, se presenta una nota histórica.

## 1.1 ¿QUÉ ES REALMENTE FDA?

El análisis de datos funcional (FDA) es una parte de la estadística que analiza datos cuyas observaciones son funciones en lugar de vectores, y que tiene impacto en diferentes campos de las ciencias como espectrometría, economía, medio ambiente, biomecánica, entre otras, convirtiéndose en una importante área de investigación en la estadística. A medida que aumenta el volumen y variedad de los datos, se necesitan nuevas herramientas para manipularlos y visualizarlos a fin de sacar de ellos resultados que ayuden a la toma de decisiones. Ramsay y Silverman (2002) también señalan que una herramienta fundamental para el análisis de datos funcionales es el lenguaje de programación estadístico R con sus librerías `fda`, `fda.usc`, etc. Además, se indica que el primer método considerado para procesar este tipo de datos funcionales fue la extensión al caso funcional del análisis en componentes principales (FPCA). A medida que estas herramientas de datos funcionales se vayan popularizando, surgirán nuevos tipos de datos funcionales que necesitarán de desarrollos específicos o adaptación de los ya existentes para su correcto tratamiento.

El objetivo general de este texto es estudiar pormenorizadamente aspectos relacionados con datos generados por el movimiento humano durante el ciclo de caminar tomando en cuenta procedimientos o técnicas del FDA.

Los objetivos específicos son los siguientes:

- Describir detalladamente el tipo de datos o mediciones que aparecen en biomecánica, en particular del movimiento humano durante el ciclo de caminar.
- Hacer una revisión de las técnicas básicas del FDA que se usan en biomecánica tomando en cuenta el suavizamiento de curvas, análisis exploratorio y FPCA.
- Recopilación y búsqueda exhaustiva de aplicaciones del FDA en biomecánica, específicamente durante el ciclo de caminar del movimiento humano, que vaya más allá del análisis estadístico de medidas globales para describir las curvas que hacen usualmente los biomecánicos.

El propósito de este texto es dilucidar las técnicas del FDA con datos biomecánicos que se generan mediante funciones que emulan el comportamiento dinámico de diferentes componentes del cuerpo humano involucrados en el movimiento de caminar. El resultado de esta investigación está orientado a la identificación, presentación, descripción y análisis estadístico de estas funciones.

La descripción de los datos funcionales biomecánicos, así como los procedimientos estadísticos y los ejemplos y gráficos presentados en este libro, proceden del estudio del texto *Research Methods in Biomechanics* (Robertson et al., 2014). Se consideran datos simulados y/o reales, o también obtenidos de bases disponibles como las del *package fds* (*functional data sets*) como la tasa de marcadores de datos de una curva de rendimiento *ECB Yieldcurve*. De manera general, se dispone de observaciones discretas que se pueden transformar en funciones aplicando segundas derivadas continuas mediante funciones *splines* o series de Fourier, hasta obtener funciones que pertenezcan al espacio de Hilbert  $L^2$  de las funciones de cuadrado integrable.

Las funciones han sido objeto de estudio de los matemáticos dentro del análisis funcional con un enfoque eminentemente teórico. Sin embargo, actualmente, los avances tecnológicos en *software* y *hardware* han permitido la captura y el tratamiento de datos como los que se toman durante el ciclo de caminar y otros procesos del movimiento humano haciendo interesante el estudio de la información que estos encierran. Las funciones o curvas modelan muchos procesos importantes, y extraer adecuadamente la información que contienen puede ser

útil. De este modo, se podría, por ejemplo, ver si una persona está recuperándose de su rehabilitación, ver si se encuentra habilitada, etc.

Por lo tanto, se define una variable aleatoria funcional como una variable aleatoria  $X$  que toma valores en un espacio de dimensión infinita (Ferrati y Vieu, 2006).

Una observación  $x$  de  $X$  se llama **dato funcional**.

Un conjunto de datos funcionales  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es la observación de  $n$  variables funcionales  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , independientes e idénticamente distribuidas a  $X$ . Es decir, constituye una muestra aleatoria de datos funcionales. Por lo general, los datos funcionales están discretizados en un conjunto de puntos  $\{t_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ ;  $d > 0$  no necesariamente equidistantes, que podrían incluso ser distintos para cada curva.

Se denota por  $X = X(t)$  a la variable funcional que depende del tiempo  $t$ , en tanto que una observación se representa por  $x$  como indican Ramsay y Silverman (2002). De hecho, los datos funcionales observados se representarían por  $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$  con  $t \in T$ , y se denominan también curvas muestrales.

Al trabajar con datos funcionales, el paso inicial es determinar el espacio funcional con su respectiva métrica. Uno comúnmente utilizado es el espacio funcional de Hilbert  $L^2$  de las funciones de cuadrado integrable definido.

Sea  $T = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . Frecuentemente, los datos funcionales son elementos del espacio de Hilbert con el producto interno definido por  $(f, g) = \int_T f(t)g(t)dt$  o, sea:

$$L^2(T) = \{X: T \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b X(t)^2 dt < \infty\} \quad (1.1)$$

Para conocer más detalles de datos funcionales, se pueden consultar libros sobre el tema como los publicados por Ramsay y Silverman (2005), Horváth y Kokoszka (2012), Valderrama S. et al. (2000). Pero también se puede utilizar una aplicación web, gratuita y libre de análisis de datos funcionales denominada *StatFda*, creada por investigadores de la Universidad de Granada, que puede ser obtenida a partir del link <https://medialab.ugr.es/noticias/statfda-aplicacion-web-de-analisis-de-datos-funcionales/> Allí, de una manera fácil, los investigadores como la Dra. Ana María Aguilera del Pino y su equipo, utilizando el programa *StatFda* y el *software* R, crean visualizaciones exploratorias y analíticas que nos muestran no solo la distribución y forma que tiene nuestro dataset, sino también las curvas

de correlación, regresión y de componentes principales, sin escribir una sola línea de código en R. Se presenta un video que muestra el programa y sus aplicaciones donde efectivamente *StatFda* realiza el análisis estadístico de datos funcionales a través de R y el paquete *fda*, cuyo manejo es fácil tras una rápida descripción. Se carga a *StatFda* el archivo con los datos en formato Excel delimitado por comas *csv*; luego, se definen los ejes X e Y, los intervalos y las dimensiones básicas y, por último, se escoge el tipo de representación funcional (poligonal o ajustada) y la plataforma nos proporciona resultados como representación de curvas, funciones de media y desviación estándar, función de correlación bivariada, análisis funcional de componentes principales, regresiones lineales y *logit* entre otros.

En la práctica, se dispone de observaciones discretas y finitas, de modo que el primer paso del FDA es reconstruir la forma funcional con estos datos  $y$ , en muchos casos, la información puede requerir algún tipo de transformación, mediante su representación en una base funcional específica.

Un conjunto de funciones conocidas y linealmente independientes  $\{\varphi_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  es una base de un espacio funcional  $E$  si cualquier función o dato funcional  $X \in E$  puede representarse por una combinación lineal finita tal que:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^p c_{ij} \varphi_j(t), \quad (1.2)$$

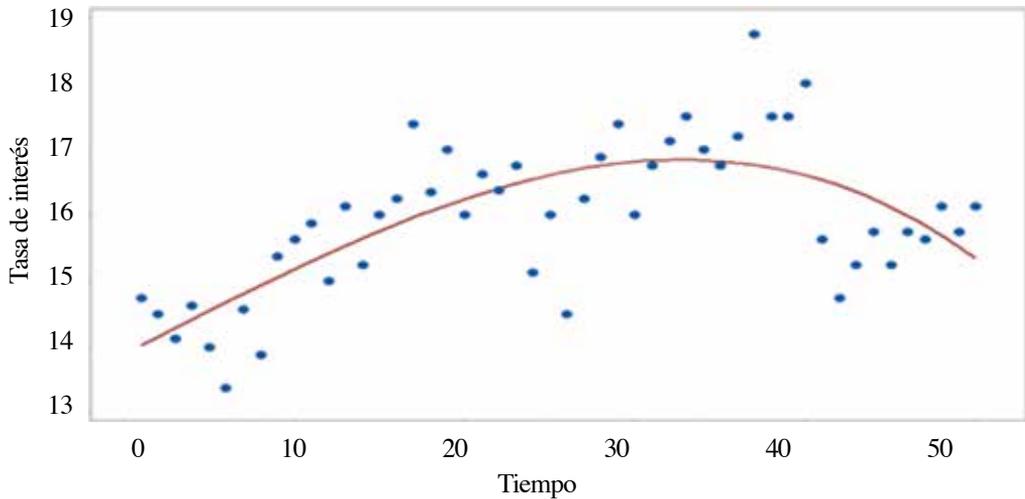
donde  $c_{ij}$  son constantes que deben estimarse. Estos datos funcionales o curvas muestrales,  $x_i(t)$  con  $i=1, \dots$ , no se pueden suavizar mediante las bases funcionales más utilizadas como *B-splines*, series de Fourier, *wavelets*, etc.

Luego se recurre al análisis exploratorio funcional en el cual se calculan varios estimadores, los mismos que dependen de la métrica o distancia  $d$  definida sobre el espacio funcional  $E$ . Se establecen, por ejemplo, las curvas: media muestral y varianza muestral, así como la superficie de covarianzas y la de correlaciones muestrales asociadas a la muestra de una variable funcional.

En las tareas estadísticas de representación de datos, se acostumbra observar puntos discretos sobre un plano. ¿Qué pasa si los datos o la información se registran como funciones definidas sobre el tiempo?

Se pueden representar los datos recopilados en tiempos discretos como una función continua (datos funcionales o curvas muestrales) con el propósito de evaluar, por ejemplo, la posición angular de las articulaciones durante el ciclo de caminar. Se pueden describir también velocidades y aceleraciones de la marcha del

Figura 1.1. Dato funcional en tiempos discretos



Nota. El gráfico representa un diagrama de dispersión (puntos o vector) que se estiman por una función continua, reproducido por Ortega y Congacha (2021).

ser humano. Entonces, se pueden representar estas funciones, pasando de datos discretos a datos funcionales como se muestra en la figura 1.1.

En la figura 1.1, se representa un ejemplo de datos funcionales en tiempos discretos como una función continua o curva continua.

Las variables funcionales se caracterizan, en los casos más usuales, por la evolución de una variable a lo largo del tiempo (proceso estocástico), de modo que los valores que toman son, en general, funciones de uno o varios argumentos. En el FDA, es importante saber la forma explícita de cada una de las funciones; sin embargo, en muchas situaciones reales, no se conoce esa forma. Aún más, en los experimentos u observaciones se obtienen simplemente datos discretos observados de la función, es decir, matemáticamente hablando, la situación es sean  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ , una muestra de  $n$  funciones y para cada  $X_1(t)$  se han tomado medidas  $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ip}$ , como imagen de la misma evaluada en la secuencia de valores dados  $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ip}$ . Ante esta situación, se considera cómo transformar estos datos en una buena estimación de la función subyacente, si bien al tomar estos datos se pueden cometer errores. En todo el planteamiento de esta situación es convertir los valores  $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ip}$ , de alguna

forma en una función  $X_i(t)$  tal que  $y_{ij} = X_i(t_{ij}) + \varepsilon_{ij}$  tal que  $\varepsilon_{ij}$  es el error observacional aleatorio con  $E[\varepsilon_{ij}] = 0$ .

Se observa que, si se conoce que el error observacional  $\varepsilon_{ij}$  es despreciable, se pueden utilizar las funciones *splines* interpoladoras por las bondades que estas tienen. En tanto que si el error observacional es diferente de cero, se puede utilizar la regresión no paramétrica por *splines* (Benalcázar, 2007) .

## 1.2 DESCRIPCIÓN DE LAS APLICACIONES BIOMECÁNICAS

El ciclo de caminar se utiliza como un ejemplo que examina la cinemática plana y tridimensional y, junto con herramientas estadísticas útiles, identifica las características esenciales de cualquier movimiento humano.

### ¿Que es la biomecánica?

La biomecánica es un campo altamente técnico, y sus métodos de investigación cambian tan rápidamente como lo hace la tecnología. Las técnicas de investigación se sustituyen periódicamente por otras nuevas debido a la disponibilidad de *software* y *hardware* más rápidos y sofisticados. Por ejemplo, hace veinticinco años, muchos investigadores utilizaron la cinematografía para registrar el movimiento humano; diez años más tarde, la cinematografía era casi obsoleta, habiendo sido reemplazada por videografía VHS. Ahora, la videografía digital e infrarroja se han convertido en las tecnologías de captura de movimiento preferidas. Computadoras más rápidas, memorias esencialmente ilimitadas pueden procesar datos utilizando análisis más complejos y métodos estadísticos más sofisticados.

La biomecánica es un área de conocimiento que se interesa por el movimiento, el equilibrio, la física, la resistencia, los mecanismos lesionales que pueden producirse en el cuerpo humano como consecuencia de diversas acciones físicas.

La biomecánica se ayuda de otras ciencias como la mecánica y la ingeniería para, con los conocimientos de anatomía y fisiología del cuerpo, poder observar, estudiar y describir el movimiento humano.

Gracias a este estudio es posible describir un movimiento correcto que previene las lesiones. (Fisicoactiva, 2019).

Pero también es necesario algún conocimiento previo para comenzar a aplicar los principios de la biomecánica en la investigación. Este texto asume que los lectores tienen un entendimiento básico en geometría, trigonometría, álgebra vectorial elemental, física básica como las leyes de Newton. También es necesario un conocimiento de anatomía humana como articulaciones, segmentos, diseño músculo-esquelético, sistema neuromuscular, etc. Con lo anteriormente dicho, se puede explicar que la **locomoción** es el sello distintivo que diferencia a los organismos del reino animal del reino vegetal y los científicos han ideado innumerables métodos para estudiar el movimiento. Los problemas relacionados con la locomoción constituyen un área importante de enfoque para deducir datos biomecánicos. Por ejemplo las hormigas, a pesar de tener un cuerpo pequeño, ambulan deprisa moviendo cada pierna a la velocidad correcta (dato biomecánico). Los peces se impulsan de manera eficiente con gran fuerza de arrastre o presión, que ejercen estos sobre el agua (datos biomecánicos). El ciclo de caminar y el control postural humano son argumentos importantes para estudiar. Se considera, a continuación, un problema de locomoción y control postural que requiere resolverse con herramientas biomecánicas.

Supongamos al regreso a casa de una persona, luego de un día difícil en la oficina. Debe ascender las escaleras delanteras de su casa, abrir la puerta, y caminar dentro antes de poner su maletín sobre una mesa. Después de subir las escaleras, alcanza el manubrio de la puerta, gira y la encuentra bloqueada. Debe recuperar las llaves de su bolsillo mientras hace malabares con su maletín y mantiene su equilibrio. Después de entrar en la casa, coloca el maletín sobre una mesa.

Estas tareas, aparentemente simples, requieren la interacción exitosa de un sistema complejo de diseño músculo-esquelético y control neuromuscular. Considere algunos de las muchas cuestiones que se resolverán:

- ¿Cómo puede nuestro sujeto subir las escaleras?
- ¿Cómo podemos describir las características del movimiento en cada articulación?
- ¿Cuánta fuerza muscular se necesita durante la transición hacia adelante del siguiente paso?

- ¿Dónde decide detenerse y alcanzar el manubrio de la puerta?
- ¿Cómo mantiene su equilibrio mientras llega a la puerta?
- ¿Cómo gira primero el manubrio de la puerta y luego recupera las llaves y abre la puerta?
- ¿Cómo entra nuestro sujeto a la casa con su maletín?
- ¿En qué punto, por ejemplo, la pierna plantada en el suelo comienza a avanzar de nuevo?
- ¿Cómo coloca el maletín sobre la mesa? ¿Qué impide que sea colocado demasiado adelante o demasiado atrás?

Todos estos problemas requieren soluciones que utilicen herramientas biomecánicas. Por ejemplo, necesitamos saber acerca de los desplazamientos y las fuerzas producidas de varias articulaciones. El análisis cinemático y cinético describe los movimientos que vemos. Cuando una persona se acerca a las escaleras, observamos movimientos repetitivos de flexión y extensión en las articulaciones de cadera, rodilla y tobillo. Estos desplazamientos angulares cambian a medida que la persona comienza a subir las escaleras. Pacientes con una lesión en las extremidades inferiores pueden utilizar un patrón diferente de desplazamiento angular de las articulaciones para realizar estas actividades. Utilizamos la información del desplazamiento para calcular velocidades y aceleraciones durante el rendimiento de estas tareas. Los movimientos que observamos pueden incluir movimiento lineal y angular. La monitorización de un punto en el tronco de la persona nos permite describir el desplazamiento y la velocidad resultante de caminar. Medimos variables cinemáticas utilizando un sistema de imágenes como una película o una cámara de vídeo o instrumentos adjuntos a la articulación para medir el desplazamiento.

En el artículo publicado por Harrison (2014), se indican que los métodos tradicionales del análisis de datos que se aplican en biomecánica a menudo se centran en solo una articulación; utilizando variables discretas como el desplazamiento de la posición durante el ciclo de caminar, variable cinemática de la marcha humana. Sin embargo, estos análisis son inadecuados al considerar la naturaleza compleja de la coordinación (de las articulaciones) humana.

Es importante considerar los datos biomecánicos, en particular los deducidos de las variables cinemáticas del ciclo de caminar humano, como el desplazamien-

to, velocidad y aceleración, a partir de una perspectiva funcional y aplicar métodos tales como el FDA.

Además, se puede requerir un análisis más complejo como el tridimensional (3-D) para describir adecuadamente estos movimientos. En la actualidad, existen *software* y computadoras especiales que pueden capturar imágenes de datos de video y calcular las trayectorias de los marcadores selectivos colocados sobre los centros de articulación de un sujeto y luego analizar los patrones de movimiento. Estos datos se procesan para derivar varias medidas cinemáticas o datos biomecánicos, tales como, el rango de movimiento de cada articulación, la velocidad y aceleración de cada segmento, y el camino del centro de gravedad.

La cinemática describe los movimientos que vemos, pero para entender por qué ocurren los movimientos, debemos examinar la cinética. A medida que nuestro sujeto camina hacia las escaleras con su maletín, él, subconscientemente, forma un plan para la transición de la superficie nivelada caminando a la subida de las escaleras.

Para ayudar a realizar la tarea de subir y mantener el equilibrio, nuestro sujeto podría apoyarse en la barandilla o pasamanos. La fuerza montada entre el pasamanos y su fijación a la pared o al suelo pueden cuantificar la cantidad de fuerza de ese soporte. La interacción con la puerta también requiere fuerza, esta vez en forma de par rotatorio aplicado al pomo de la puerta; también puede calcular el coste mecánico del trabajo realizado y **la potencia mecánica** requerida en cada articulación. A medida que aumenta la velocidad de movimiento, se requiere una mayor potencia mecánica. Una persona de edad avanzada puede llevar a cabo todas las tareas necesarias para la vida cotidiana a un ritmo mucho más lento que una persona más joven; sin embargo, **el coste energético** para ambos será similar y la potencia mecánica requerida en cada articulación se mantendrá dentro de la capacidad de cada articulación.

Subir las escaleras, particularmente cuando se lleva algo, requiere estabilización postural para evitar una caída. Aunque los análisis cinemáticos, cinéticos y EMG (de los términos en inglés *electromyogram*, *electromyography*, que significan en castellano «electromiograma, electromiografía») son indispensables para el estudio de los movimientos reales, la cuestión que queda responder es: ¿se pueden subir de una manera más eficiente o eficaz las escaleras? Después de todo, si el objetivo es simplemente moverse, se podría hacer de diferentes maneras, por

ejemplo, dando saltos en una o en ambas piernas, de escalera en escalera o arrastrándose hacia arriba de manos y rodillas. Pero también, ¿cuál es la forma óptima para que una persona suba escaleras? Los modelos de dinámica directa abordan estas cuestiones simulando un movimiento, dando un conjunto de fuerzas y pares aplicados internamente (Robertson et al., 2013).

Una vez que el modelo se personaliza, se utilizan técnicas de control individuales y óptimas para encontrar el mejor conjunto de fuerzas y pares necesarios para llevar a cabo la tarea. Si mejor es el comportamiento como el patrón de movimiento que minimiza el esfuerzo muscular general, el modelo de optimización encuentra los patrones de cinética y cinemática necesarias para que el sujeto suba las escaleras con el menor esfuerzo muscular. Finalmente, los resultados de los modelos de optimización se comparan con el movimiento real producido por la persona que sube las escaleras. Las formas en que puede mejorar su rendimiento pueden salir a la luz. Los modelos musculares que imitan las capacidades de generación de fuerza de los músculos reales se pueden utilizar para proporcionar valores para las fuerzas internas en estos modelos de dinámica de avance. Su uso es esencial para la investigación biomecánica porque la tecnología para medir las fuerzas musculares individuales es altamente invasiva e inadecuada para su uso en la mayoría de las situaciones de investigación (Robertson et al., 2013).

Se requieren muchos datos para realizar análisis cinemáticos, cinéticos, EMG, entre otros. Por ejemplo, para cuantificar los movimientos de marcadores reflectantes colocados sobre los centros de articulación, el investigador debe digitalizar los datos de video utilizando ordenadores de alta velocidad para obtener las posiciones de los segmentos del cuerpo durante las actividades en estudio (Robertson et al., 2013). Para determinar las variables cinemáticas como velocidades y aceleraciones, los investigadores calculan las derivadas respecto al tiempo de desplazamiento; utilizan algoritmos que requieren técnicas de suavizado especiales. El investigador debe saber qué técnica es apropiada para su uso y luego evaluar si fue exitosa.

### 1.3 NOTA HISTÓRICA DE LA BIOMECÁNICA

Si bien se conoce al movimiento de seres vivos como biomecánica a partir de la segunda mitad del siglo XX, etapa en que su estudio se desarrolla de manera acelerada, sus orígenes son tan antiguos como el propio hombre, quien, en su actividad diaria, se ve obligado, de manera consciente o intuitiva, a perfeccionar los movimientos de su cuerpo. Aristóteles (384-322 a.C.), en la antigua Grecia, realizó los primeros análisis «biomecánicos» al aplicar los principios geométricos al estudio del movimiento del hombre como caminar o saltar. En la antigua Roma, Galeno analizó los movimientos de la lucha de los gladiadores y sugirió la importancia de la actividad nerviosa en la contracción muscular. Leonardo da Vinci (1452-1519) estudió los músculos y su participación en diferentes posturas del cuerpo para sus famosas pinturas; también observó el vuelo de las aves y elaboró el proyecto del «pájaro mecánico». Asimismo, otros sabios como Galileo Galilei, Luis Alfonso Borelli, Isaac Newton establecieron las leyes básicas de las matemáticas y la física que permiten calcular fuerza, velocidad, aceleración y otros patrones del complejo mecanismo que constituye el movimiento del cuerpo humano. De modo paralelo, en la China antigua, desde los orígenes de las artes marciales, yoga y otras escuelas, se encuentran grandes maestros que desarrollaron cualidades motrices y perfeccionaban movimientos y posturas del movimiento humano.

De todo lo dicho anteriormente, podemos considerar que la biomecánica es la ciencia que se ocupa del movimiento de los seres vivos, en particular del ser humano, basándose en las leyes de la mecánica. Su metodología se fundamenta en su observación y medición para la modelación (recopilación, representación, análisis-interpretación de datos) del movimiento.

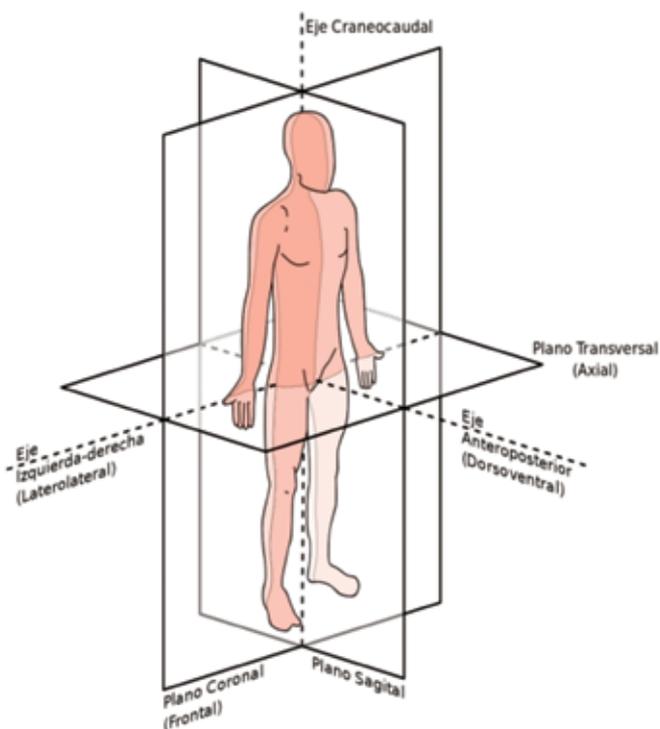
Más formalmente, diremos que la biomecánica es una rama dedicada al estudio de la dinámica y funcionamiento del aparato locomotor del hombre valiéndose de conocimientos físicos. Su principal objetivo es la proposición de métodos de intervención para mejorar el desempeño de las estructuras mecánicas del cuerpo humano.

En la figura 1.2 se hace un resumen de la división del cuerpo humano mediante planos y ejes, que ayuda a comprender y conocer aspectos inherentes al cuerpo humano para el análisis de posición durante el ciclo de caminar, al momento de describir la posición de marcadores, segmentos y articulaciones que se desarrollan en este texto.

Figura 1.2. Posición anatómica del cuerpo humano para el análisis de posición durante el ciclo de caminar

**Planos:**  
Sagital o mediano  
Coronal o frontal  
Transversal o axial

**Ejes:**  
Transversal o laterolateral  
Longitudinal o craneocaudal  
Medial o anteroposterior



Nota. Posición anatómica del cuerpo humano para el análisis de posición durante el ciclo de caminar.  
Fuente: adaptada de Celadores (2022).

En la figura 1.2, se visualizan planos y ejes que dividen al cuerpo humano para comprender y conocer aspectos inherentes del cuerpo humano para el análisis de posición durante el ciclo de caminar.

## **CAPÍTULO II. DATOS FUNCIONALES DE LA BIOMECÁNICA**

En este capítulo, se hace un estudio de los diferentes tipos de datos funcionales que aparecen en el movimiento del cuerpo humano. Principalmente se analizan las variables funcionales del desplazamiento, velocidad y aceleración de la posición durante el ciclo de caminar, tanto lineal como angular de la cinemática plana o espacial.

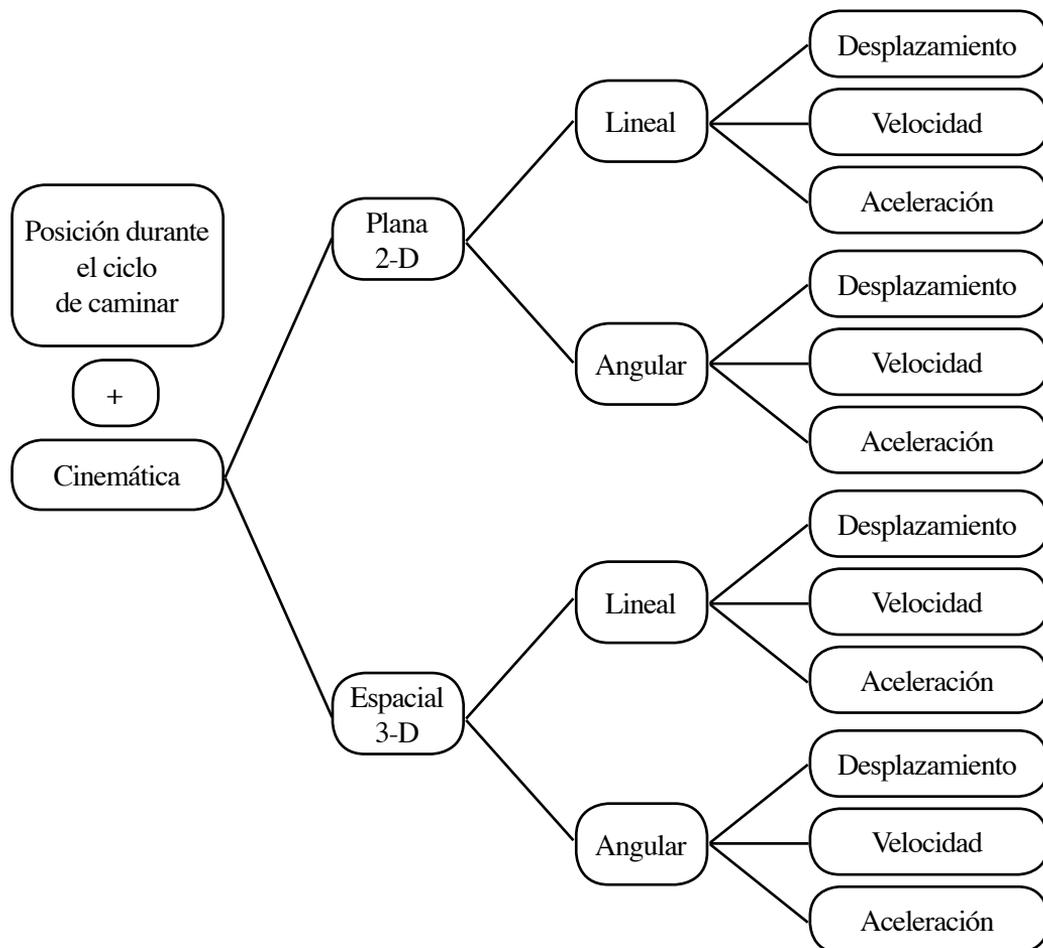
Los datos que describen los movimientos de los seres vivos se denominan cinemáticos. En particular, cuando se realiza un análisis cinemático del movimiento humano, los datos se llaman biomecánicos.

A continuación, se indica un esquema que describe la obtención de datos biomecánicos: desplazamiento, velocidad y aceleración; considerando los tipos de cinemática plana y espacial y sobre ellos el estudio de forma lineal o angular.

En la figura 2.1, se representa, mediante un esquema, datos funcionales biomecánicos: desplazamiento, velocidad y aceleración de la posición durante el ciclo de caminar.

Para este estudio, primero se describe cómo recopilar, procesar y presentar datos para el caso bidimensional y, en la segunda parte, se amplía el estudio sobre patrones del movimiento humano de la posición durante el ciclo de caminar al caso espacial.

Figura 2.1. Esquema de datos funcionales biomecánicos: desplazamiento, velocidad y aceleración



Nota. Esquema que describe la obtención de datos biomecánicos: desplazamiento, velocidad y aceleración

Fuente: Ortega y Congacha, 2021

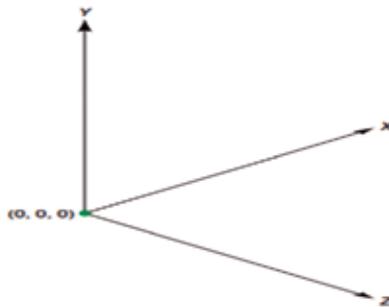
## 2.1 SISTEMAS DE COORDENADAS GLOBAL Y LOCAL (GCS Y LCS). POSICIÓN DURANTE EL CICLO DE CAMINAR

Para describir cuantitativamente en general la posición de un punto del cuerpo humano, se considera un sistema de coordenadas cartesianas, denominado **sistema de coordenadas global (GCS)**, siglas en inglés adoptados por la ISB (*International Society in Biomechanics de Global Coordinate System*) y definido por:

- Un origen (0,0) en el plano o (0, 0, 0) en el espacio y
- dos o tres ejes mutuamente ortogonales que pasan por el origen del plano o espacio respectivamente.

En este GCS se indica la dirección horizontal principal del movimiento humano o de un sujeto sobre el eje X; el eje Y es ortogonal a X y apunta hacia arriba verticalmente; en tanto que el eje Z es perpendicular al plano X-Y. Además, el GCS descrito es un sistema diestro (ver figura 2.2).

Figura 2.2. Sistema de coordenadas global, GCS diestro



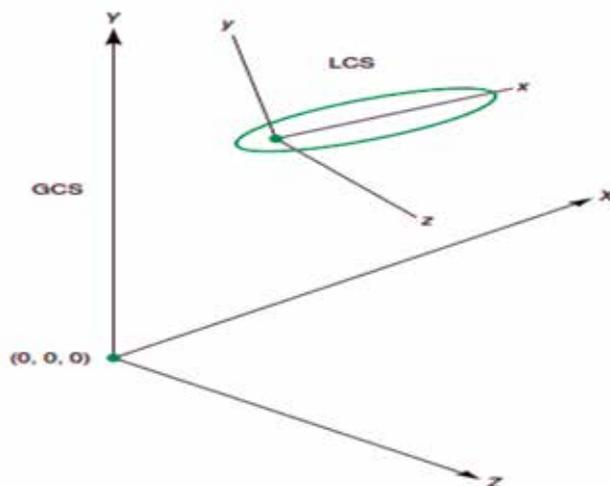
Nota. El gráfico representa un sistema GCS.  
Fuente: Robertson et al., 2014, p.10

En la figura 2.2, se representa un GCS diestro que utiliza la convención adoptada por la ISB. El eje de movimiento del sujeto es X.

Se quiere establecer la designación del origen por sus coordenadas (letras minúsculas)  $(x, y)$  en el plano (letras mayúsculas)  $(X, Y, Z)$  en el espacio, dado que es muy importante para cuantificar la posición dentro del GCS, puesto que cualquier punto se describe por su posición en relación con el origen.

Debido a que el objeto (segmento o articulación) tiene un volumen y una forma particular, se debe describir su orientación con respecto a los ejes de referencia del GCS. Cuando se inicia la posición del ciclo de caminar, se establece un segundo marco de referencia que tiene su origen y ejes perpendiculares entre sí y luego permite el movimiento de este con el movimiento del cuerpo (fig. 2.3). En general, esto se conoce como un sistema de coordenadas relativo o local LCS por sus siglas en inglés de *local coordinate system*. Entonces, la posición relativa de los ejes LCS con respecto a GCS define la orientación de un cuerpo o segmento rígido. Obsérvese que se necesitan al menos tres ángulos de rotación para describir la orientación de LCS en 3-D. Se pueden utilizar varios conjuntos de ángulos diferentes para especificar la orientación del LCS, pero cada uno de estos conjuntos contiene tres ángulos independientes.

Figura 2.3. Sistema de coordenadas local LCS, dentro del sistema de coordenadas global GCS

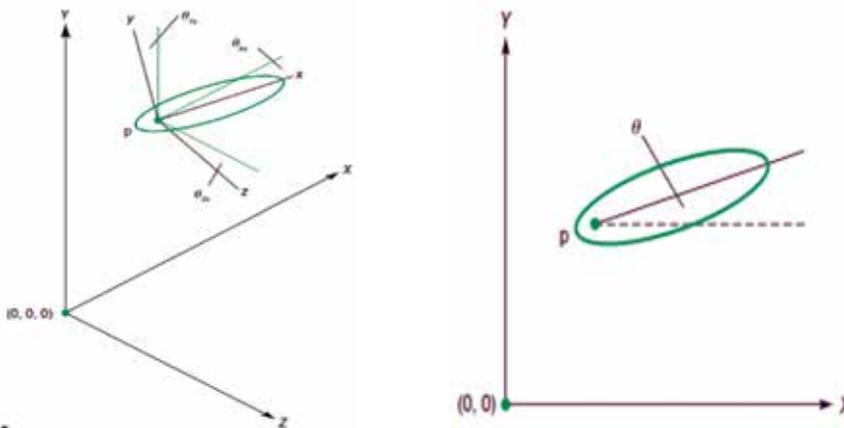


Nota. El gráfico representa el sistema LCS.  
Fuente: Robertson et al., 2014, p.10

En la figura 2.3, se ha representado LCS adjunto a un objeto (cuerpo humano) ubicado dentro del GCS.

El número de parámetros independientes (datos de información) que definen de forma única la ubicación de un punto o cuerpo se conoce como *grados de libertad* del objeto (DOF, en sus siglas en inglés de *degrees of freedom*). Por ejemplo, un punto del espacio tiene tres DOF, mientras que un cuerpo rígido tiene seis DOF (fig. 2.4 a).

Figura 2.4. Grados de libertad DOF en un GCS



Nota. Los gráficos representan los grados de libertad en un sistema de coordenadas espacial.  
Fuente: Robertson et al., 2014, p.11

En la figura 2.4, se representan los grados de libertad DOF en un GCS: a) El punto final segmentado p se puede representar por sus coordenadas (X, Y, Z) y luego tiene tres DOF. Para describir la posición del segmento en sí, se deben especificar tres ángulos ( $\theta_{Xx}, \theta_{Yy}, \theta_{Zz}$ ) que representan la orientación de los ejes x, y y z de LCS con respecto a los ejes de GCS X, Y y Z. Así, en el espacio, un cuerpo rígido tiene seis DOF (X, Y, Z,  $\theta_{Xx}, \theta_{Yy}, \theta_{Zz}$ ). b) DOF en un sistema de coordenadas en el plano. El punto final segmentado p se puede representar por sus coordenadas (X, Y) y luego tiene dos DOF. Para describir la posición del segmento, se necesita un ángulo  $\theta$  que describe la orientación del segmento y deben especificar

carse los ejes X e Y de GCS. Por lo tanto, en el plano, un cuerpo rígido tiene tres DOF representados por  $(X, Y, \theta)$ .

La descripción completa de la posición durante el ciclo de caminar implica el movimiento espacial. En muchos casos, este movimiento humano se puede describir en un plano específico, como el sagital definido por los ejes X e Y del GCS, o en otros planos, como el frontal o el plano transversal, pero se exhibe menos amplitud de movimiento en estos. En consecuencia, muchos detalles esenciales se pueden determinar a partir de un análisis del plano sagital. Esto simplifica la medición, el análisis y la interpretación para describir un movimiento espacial y sirve como un punto de partida para comprender los movimientos que son principalmente de naturaleza plana. La ventaja para describir la posición de un punto es una reducción de DOF de tres  $(X, Y, Z)$  a dos DOF,  $(X, Y)$ . En tanto que, para un cuerpo rígido en dos dimensiones, el DOF se reduce de seis a tres, con solo dos coordenadas  $(X, Y)$  y un ángulo  $(\theta)$  que sirven para ubicar el objeto (fig. 2.4 b) en el plano. Esta sección se centra en la cinemática plana o 2-D (2-D, denota el espacio bidimensional o plano). Sin embargo, muchos de los conceptos planteados en el contexto de la cinemática plana también se aplican a la cinemática espacial 3-D (3-D, denota el espacio tridimensional o espacial).

## 2.2 CINEMÁTICA PLANA O EN 2-D

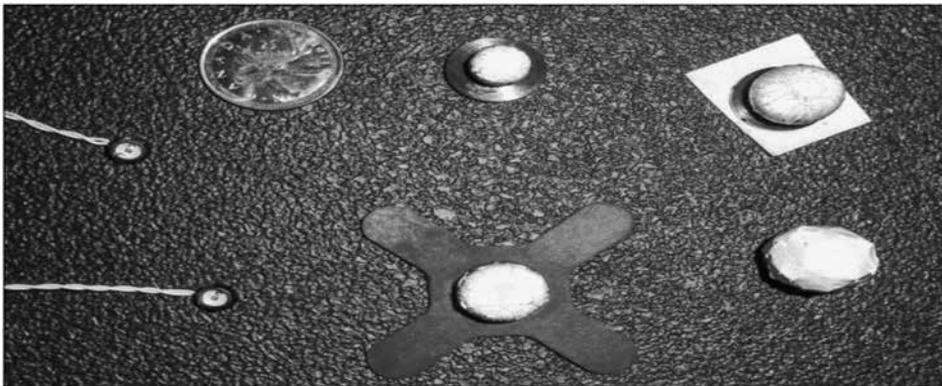
### 2.2.1 Marcadores para la recolección de datos biomecánicos

Se pueden recoger datos para el análisis del movimiento humano a través de dispositivos mecánicos, electrónicos, entre otros, a los que se les denomina marcadores; o también se puede hacer esta captura con interacción de cámaras y computadoras u ordenadores (Herda et al., 2001).

El método que se utiliza para recopilar datos biomecánicos es un sistema de imagen que registra el movimiento de los marcadores colocados en un sujeto en movimiento, seguido de la digitalización manual o automática de imágenes para obtener las coordenadas de los marcadores. Luego, estas coordenadas se procesan para conseguir datos biomecánicos. Se utilizan IRED, siglas en inglés de *infrared*

*light-emitting diodes*, diodos emisores de luz infrarrojos activos. Los sistemas de marcadores activos requieren una unidad de control que pulsa los IRED individuales en secuencia para la identificación correcta del marcador.

Figura 2.5. Marcadores utilizados en la recolección de datos biomecánicos con sistemas de imagen



Nota. En la imagen se muestran los marcadores utilizados en la recolección de datos biomecánicos con sistemas de imagen.

Fuente: Robertson et al., 2014, p.12

Una de las ventajas de los sistemas de imagen modernos es que la mayoría de ellos tiene digitalización automática que calcula y muestra rápidamente los datos de posición de coordenadas de varios marcadores a lo largo de toda la secuencia de movimiento.

En muchas situaciones, es poco práctico, imposible o indeseable colocar marcadores en el sujeto que realiza el movimiento, como atletas en competiciones y pacientes en situaciones clínicas que no pueden soportar un período de preparación experimental extendido. En estas situaciones, el investigador debe digitalizar manualmente el registro de movimiento, utilizando fronteras anatómicas identificables para ubicar los puntos necesarios para el modelo del movimiento. Los sistemas sin marcadores utilizan técnicas de gráficos informáticos para igualar la forma de un segmento de cuerpo con una forma predeterminada. Se graba un ví-

deo del sujeto en movimiento y se convierte en formato digital. El *software* extrae las posiciones de puntos individuales y segmentos del modelo, digitalizando efectivamente las ubicaciones de los puntos deseados tanto de sistemas de imágenes de marcadores como sin marcadores.

El propósito de los marcadores conectados a una computadora es determinar un sistema de imágenes que proporcione coordenadas matemáticamente. Al digitalizar la longitud, se puede obtener ecuaciones del tipo:

$$S = \frac{\textit{longitud (metros)}}{\textit{longitud digitalizada (metros)}} \quad (2.1)$$

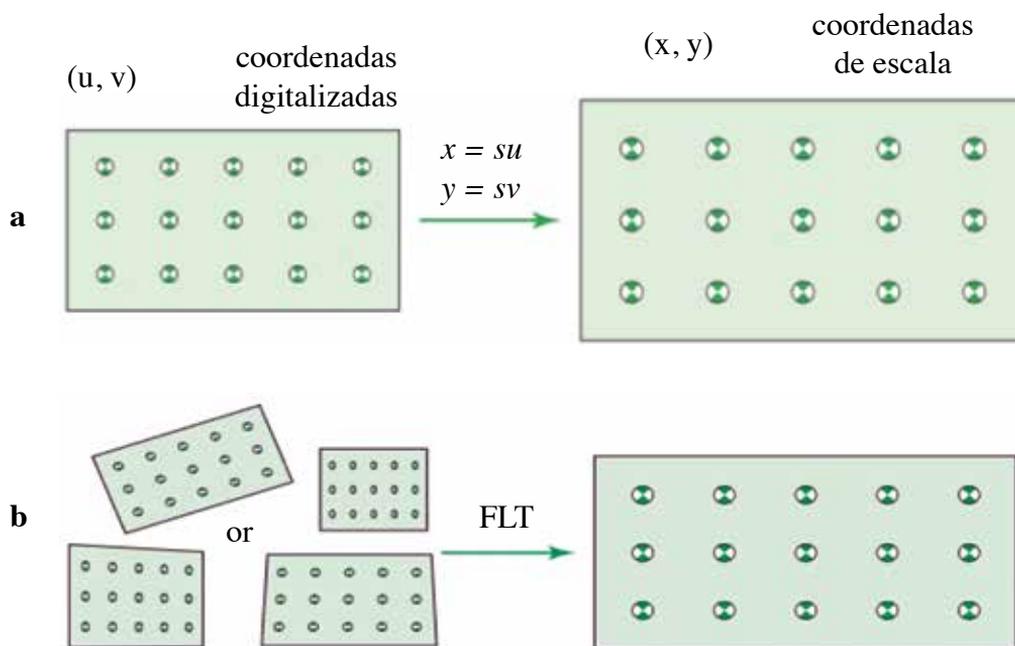
$$x = su \quad (2.2)$$

$$y = sv \quad (2.2)$$

Donde,  $u$  y  $v$  son las coordenadas digitalizadas de un marcador y,  $x$  e  $y$  son las coordenadas de escala (ver fig. 2.6 a).

La videogrametría es una técnica derivada de la fotogrametría que se vale de imágenes de algún objeto tomadas desde varios puntos de vista para realizar una reconstrucción tridimensional de él. Con el fin de lograr tal objetivo, dicha técnica usa el método DLT, siglas en inglés de *direct linear transformation*, que consiste en un par de ecuaciones lineales que relacionan la coordenada en la imagen de un punto con su ubicación espacial mediante la teoría de proyección perspectiva (Gruen, 1997).

Figura 2.6. Comparación del método del factor de escala

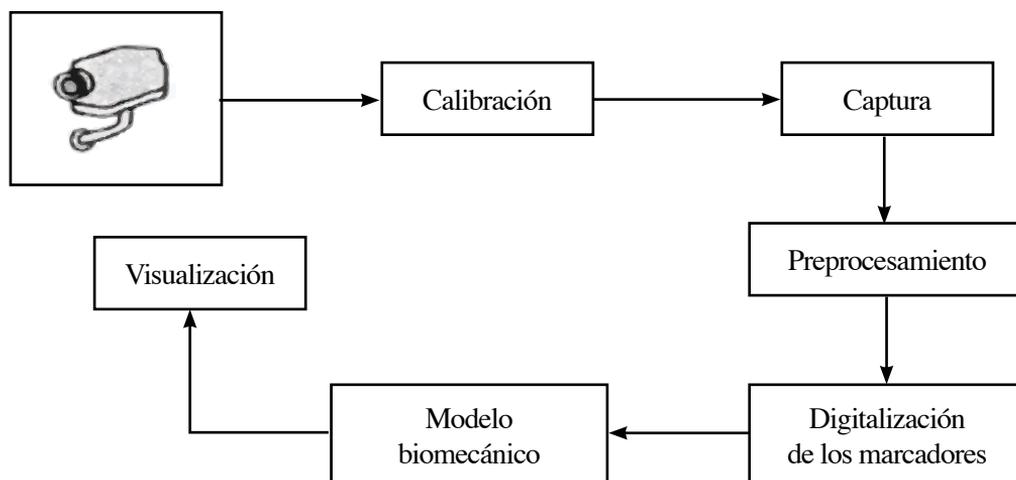


Nota. Los gráficos representan las imágenes para reconstruir objetos tridimensionales. a) El método de transformación lineal fraccional y b) para transformar imágenes digitalizadas en mediciones reales.

Fuente: Robertson et al., 2014, p.16

El método común para permitir la transformación de los datos de coordenadas digitalizadas a unidades métricas reales se denomina transformación lineal fraccional (FLT, siglas en inglés fractional linear transformation) cuando se aplica a dos dimensiones o transformación lineal directa DLT, cuando se aplica a tres dimensiones. Después de filmar los puntos de marcadores, se calculan las ecuaciones en 2-D con una sola cámara como indica la fig. 2.7.

Figura 2.7. Esquema de la posición durante el ciclo de caminar bidimensional, 2-D



Nota. El gráfico representa el esquema para el análisis de la posición durante el ciclo de caminar bidimensional.

Fuente: (Ryan et al, 2006).

En la figura 2.7, se representa un esquema del desarrollo para el análisis de la posición durante el ciclo de caminar bidimensional, 2-D.

Cuando se inclina una cámara con respecto al plano de movimiento, las distancias se distorsionan como se ilustra en la Fig. 2.6 b. Las FLT y DLT corrigen estos tipos de errores.

A continuación, se presentan ejemplos de colocación de marcadores sobre los cuerpos rígidos: de la pelvis, el muslo, la pierna y el pie:

Figura 2.8. Marcadores de un corredor y un ciclista

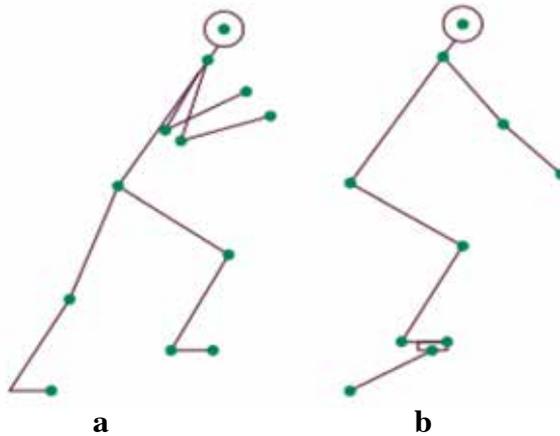


Figura 2.9. Marcadores en las articulaciones



Nota. Los gráficos representan los marcadores necesarios para representar el movimiento.  
Fuente: Robertson et al., 2014, p.18

En la figura 2.8, se muestran los marcadores necesarios para representar a un corredor (izquierda) y un ciclista y, en la figura 2.9, se representan marcadores de los posibles movimientos de las articulaciones: tobillo, rodilla y cadera.

Otras articulaciones son más complejas. La de la rodilla, por ejemplo, permite la flexión-extensión y una cierta rotación a través de la meseta tibial. Esto significa que la rodilla tiene dos grados de libertad: uno para la rotación y otro para la translación.

## 2.2.2 Cinemática lineal

La cinemática, en esta sección, se considera como la rama de la física que estudia el movimiento del cuerpo humano sin atender las causas o factores que producen fuerzas, energías, potencia, entre otros, que puede realizarse en el plano o el espacio y tomando en cuenta el sistema de coordenadas cartesianas que permite la cuantificación de la posición y sus derivados durante el ciclo de caminar.

### Ecuaciones de velocidad y aceleración lineal de datos biomecánicos

Se introducen los datos biomecánicos o variables «cinemáticas»: desplazamiento, velocidad y aceleración, los cuales describen la manera en que la posición de un punto o marcador colocado en las extremidades inferiores cambia durante un período de tiempo.

En biomecánica, se utilizan tres métodos para calcular derivadas —**analítico**, **gráfico** y **numérico**— que se aplican relativamente. Cada uno de estos tienen sus ventajas y sus desventajas. El método más común es el numérico, específicamente en lo que se refiere a la diferenciación numérica, principalmente debido a la forma en que se recopilan los datos experimentales. Las coordenadas de posición igualmente espaciadas en el tiempo están en el formato preciso y necesario para aplicar técnicas numéricas. Sin embargo, si no se utilizan con cuidado, los métodos de diferenciación numérica pueden producir errores computacionales. Existe una variedad de fórmulas de derivadas numéricas que pueden describir los datos biomecánicos. Las ecuaciones que se presentan para obtener valores de velocidad y aceleración son las del cálculo de diferencias finitas, en particular se utiliza el método de diferencia central:

$$V_i = \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{2(\Delta t)}, \quad (2.4)$$

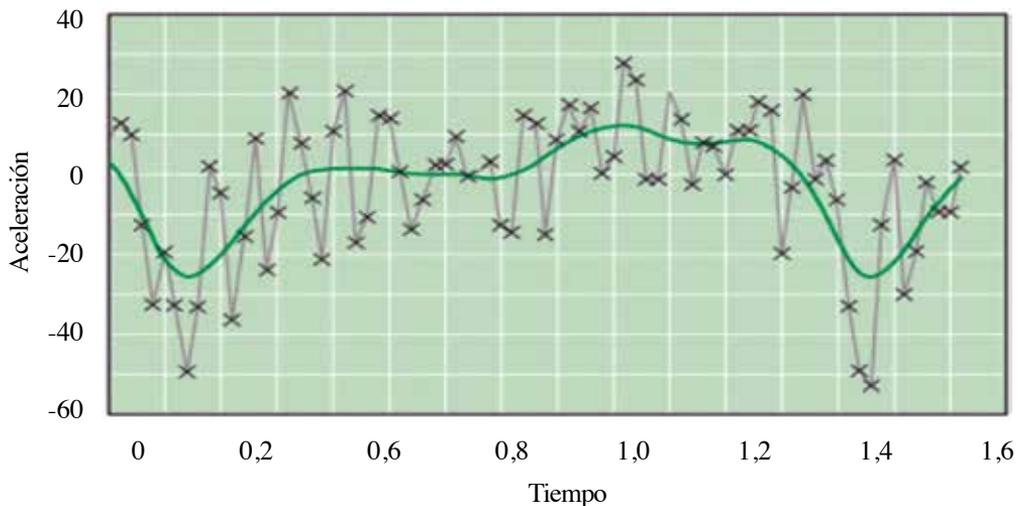
$$a_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2(\Delta t)} = \frac{s_{i+2} - 2s_i + s_{i-2}}{4(\Delta t)^2}, \quad (2.5)$$

$$\text{ó } a_i = \frac{s_{i+1} - 4s_i + s_{i-2}}{(\Delta t)^2}, \quad (2.6)$$

donde  $v_i$  y  $a_i$  son la velocidad y aceleración del marcador en el momento  $i$ ,  $\Delta t$  es el intervalo de muestreo de los datos (en segundos), y  $s$  es la posición lineal ( $x$  o  $y$  en metros).

En la figura 2.10, se muestra el patrón de aceleración de un marcador de dedo de pie que se calculó a partir de datos de posición digitalizados con vídeo. Obsérvese que se produce un patrón irregular incluso durante el período en el que se supone que el marcador está inmóvil en el suelo; por ejemplo, de 0,3 a 0,7 s., se produce diferente variabilidad. Ninguna digitalización cuidadosa puede eliminar este problema. Estos picos de ruido ocurren porque pequeños errores en el proceso de digitalización representan grandes aceleraciones. La segunda derivada de una onda sinusoidal pura ilustra analíticamente este fenómeno. Matemáticamente, esto produce otra onda sinusoidal que es la fase desplazada a 180°; sin embargo, si el ruido está presente en la onda sinusoidal original, la segunda derivada es

Figura 2.10. Historial de la aceleración vertical del marcador del dedo pulgar



Nota. El gráfico representa la aceleración vertical del marcador del dedo pulgar filtrado (línea verde) y sin filtrar (línea gris marcada con símbolos X) durante la marcha.

Fuente: Robertson et al., 2014, p. 21

muy diferente. Existe una serie de métodos de suavizado aceptables para eliminar el ruido de alta recurrencia inducido por el proceso de digitalización, incluyendo filtrado digital de paso bajo, *splines* cúbicos y quinticos (polinomios de grado tres y cinco respectivamente) por etapas y reconstrucción de la serie de Fourier que se tratará en el siguiente capítulo.

Para los datos recogidos con tasas de muestreo suficientemente altas, este método funciona bien. En los casos en que los movimientos se producen rápidamente y la frecuencia de muestreo no es excesivamente alta, se puede utilizar un método de *splines* que estudiaremos en el capítulo 3.

### 2.2.3 Cinemática angular

Las medidas de posición angular se pueden dividir en dos clases. La primera se refiere a la posición angular u orientación de los cuerpos individuales. Estos se denominan ángulos de segmentos o absolutos, porque, por lo general, se toma en cuenta un marco de referencia absoluto o newtoniano. La segunda clase se refiere al ángulo entre dos segmentos del cuerpo adyacentes. Estos se denominan ángulos de articulaciones, relativos, o cardinales, ya que miden la posición angular de un segmento con respecto a otro.

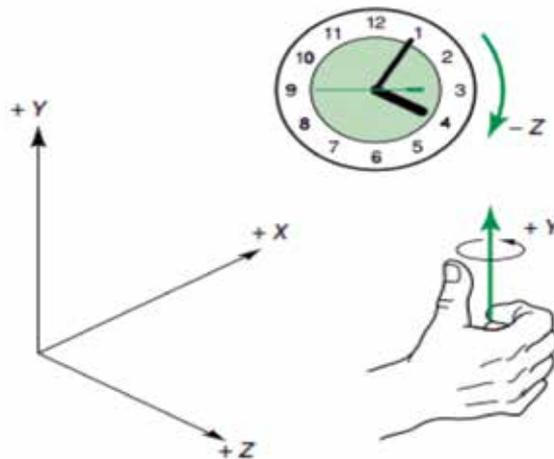
#### Ángulos de segmentos o absolutos

En la sección sobre marcadores, se indicó que al menos dos puntos deben ser cuantificados para describir la posición angular de un segmento del cuerpo humano en un plano 2-D. Estos ángulos absolutos siguen una regla denominada regla de la mano derecha (fig. 2.11), que especifica que las rotaciones positivas son en sentido contrario a las agujas del reloj y las rotaciones negativas son en sentido horario. Al curvar los dedos de la mano derecha en la dirección del ángulo o la rotación y, a continuación, al comparar la dirección del pulgar con los ejes de referencia, se indicará el signo de un ángulo o una rotación sobre un eje determinado. Si el pulgar apunta en la dirección de un eje positivo, entonces el ángulo o la rotación es positiva.

## Convenios angulares

Se utilizan dos convenios para cuantificar los ángulos de segmentos. El primero mide ángulos como una brújula, con ángulos que van desde  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , mientras que el segundo permite un rango de  $+180^\circ$  a  $-180^\circ$  (fig. 2.12). Estos convenios dan los mismos valores para ángulos entre  $0^\circ$  y  $+180^\circ$ , pero diferentes para ángulos entre  $180^\circ$  y  $360^\circ$ . Con el segundo convenio (véase fig. 2.13), estos ángulos varían de  $0^\circ$  a  $-180^\circ$ , haciéndolos más fáciles de visualizar.

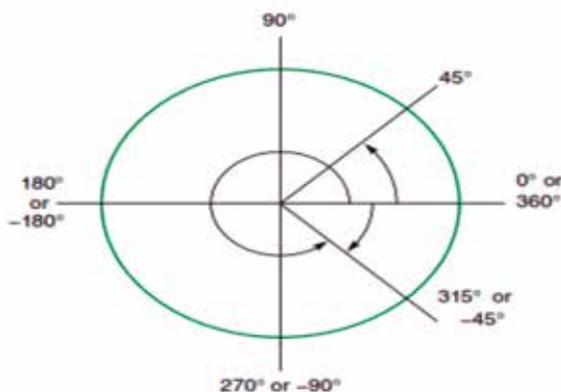
Figura 2.11. Regla de la mano derecha para definir direcciones rotacionales



Nota. Los gráficos representan las direcciones rotacionales del sistema LCS.  
Fuente: Robertson et al., 2014, p. 25

En la figura 2.12, se representan dos convenios para definir ángulos absolutos de segmentos. Uno mide ángulos en el rango de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , mientras que el otro utiliza un rango de  $180^\circ$  o  $-180^\circ$ .

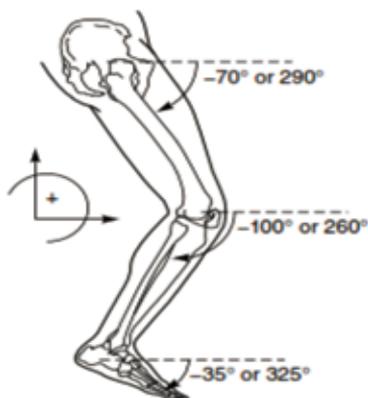
Figura 2.12. Dos convenios para definir ángulos absolutos de segmentos



Nota. El gráfico representa los ángulos absolutos de segmentos.

Fuente: Robertson et al., 2014, p. 25

Figura 2.13. Ejemplos de ángulos absolutos de la extremidad inferior.



Nota. El gráfico representa los ángulos absolutos de la extremidad inferior.

Fuente: Robertson et al. 2014, p. 26

En la figura 2.13, se observan ejemplos de ángulos absolutos de la extremidad inferior. Todos los ángulos se toman desde la horizontal derecha del extremo proximal del segmento.

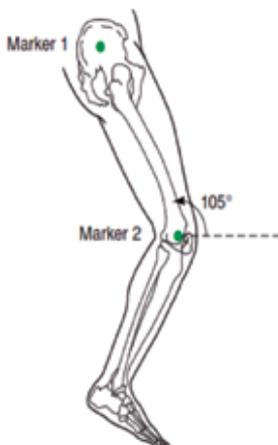
## Ángulos de articulaciones o relativos

El cuerpo humano es un conjunto de segmentos unidos por las articulaciones, por lo que la medición y la descripción de los ángulos relativos (o de articulación) son a menudo útiles. La cuantificación de un ángulo de articulación requiere un mínimo de tres coordenadas o dos ángulos absolutos, como se muestra en la figura 2.14. Al definir movimiento de articulaciones, se debe recordar que las adyacentes pueden tener direcciones diferentes para el mismo tipo de movimiento. Por ejemplo, si la flexión de la rodilla es una rotación positiva según el GCS, entonces la flexión de la cadera es una rotación negativa (ver fig. 2.14 c). Observe que se presenta un sistema biomecánico que respeta la regla de la mano derecha.

El movimiento angular de un cuerpo rígido también produce movimiento lineal de puntos individuales como «marcadores» adheridos al cuerpo. Además, la cantidad de desplazamiento lineal de un punto depende de su ubicación con respecto al eje sobre el que gira el cuerpo. Considere el movimiento de un reloj de manecillas (fig. 2.15). Un marcador colocado en el centro del reloj no sufrirá desplazamiento lineal a medida que los minutos marquen, pero un marcador al final de una manecilla barrerá un trazado circular.

Figura 2.14. Ángulos absolutos y relativos

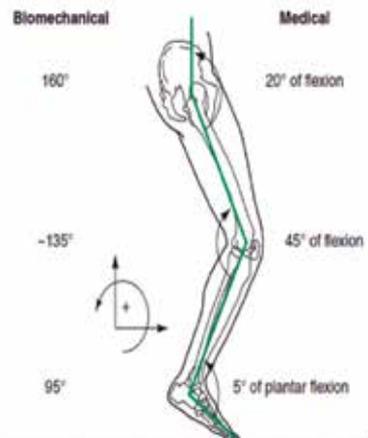
a) Ángulos absolutos



a) Ángulos relativos



c) Ángulos relativos de la extremidad inferior



Nota. Los gráficos representan los ángulos absolutos y relativos.

Fuente: Robertson et al. 2014, p. 26-27

Figura 2.15. Coordenadas polares  $(r, \theta)$  y cartesianas  $(x, y)$  para un reloj de manecillas

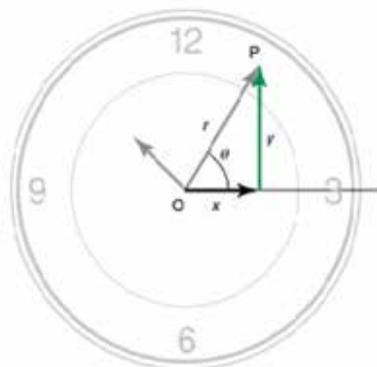
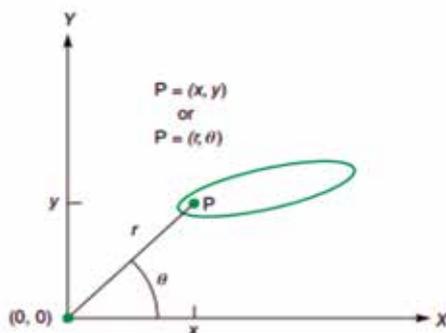


Figura 2.16. El punto P se expresa como  $(x, y)$  o como  $(r, \theta)$



Nota. Los gráficos de las figuras 2.15 y 2.16 representan las coordenadas polares.  
Fuente: Robertson et al., 2014, p. 27

En la figura 2.16, se observa que las coordenadas polares representadas fácilmente como coordenadas cartesianas que utilizan la longitud de un segmento de la línea que une el punto P y el origen ( $r$ ) y el ángulo ( $\theta$ ) entre el segmento de línea y un fijo la segunda coordenada.

La descripción matemática de este movimiento angular-lineal se estudia con coordenadas polares. Una línea se construye desde el origen del sistema de ejes hasta el punto P (fig. 2.16). La longitud ( $r$ ) de la línea representa un DOF, mientras que el ángulo ( $\theta$ ) entre la línea y uno de los ejes de referencia (normalmente el eje derecho horizontal desde el centro de reloj) describe el segundo DOF. Estas se denominan las coordenadas polares del punto y se escriben  $(r,\theta)$ . En la figura 2.16, se dibuja una línea desde el punto P hasta el eje de referencia formando un triángulo rectángulo, para convertir de polar a coordenadas cartesianas de la siguiente manera:

$$x = r \cos \theta, \quad (2.7)$$

$$y = r \sen \theta \quad (2.8)$$

Aunque las coordenadas cartesianas se utilizan con mayor frecuencia en la investigación biomecánica, para algunas aplicaciones, es más conveniente utilizar coordenadas polares. Siempre es posible, dadas las coordenadas cartesianas ( $x$ ,  $y$ ) de un punto, calcular sus coordenadas polares  $(r,\theta)$  utilizando las siguientes relaciones trigonométricas:

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}, \quad (2.9)$$

$$\theta = \tan^{-1} (y/x) \quad (2.10)$$

### Ecuaciones de velocidad y aceleración angular de datos biomecánicos

El **desplazamiento angular** se define como el cambio en la posición angular. La **velocidad angular** es la tasa de cambio del desplazamiento angular con respecto al tiempo; y la **aceleración angular** es la tasa de cambio de la velocidad angular con respecto al tiempo. Por el contrario, la velocidad angular es la integral de la aceleración angular con respecto al tiempo y el desplazamiento angular es la integral de la velocidad angular con respecto al tiempo. Estas tres variables cinemáticas se utilizan para describir el movimiento angular de los cuerpos rígidos.

Las ecuaciones de diferencia finita central para calcular la velocidad angular ( $\omega$ ) y la aceleración ( $\alpha$ ) son:

$$\omega_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2(\Delta t)}, \quad (2.11)$$

$$\alpha_i = \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2(\Delta t)}, \quad (2.12)$$

$$\text{ó } \alpha_i = \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{(\Delta t)^2}, \quad (2.12)$$

donde  $\theta$  representa la posición angular y  $\Delta t$  representa el tiempo de duración entre las muestras adyacentes. El subíndice  $i$  representa el instante particular en el tiempo que se está analizando.

Obsérvese que, como en el caso lineal, antes de aplicar estas ecuaciones, las posiciones angulares originales deben ser suavizadas para eliminar el ruido de alta frecuencia. Si las posiciones angulares se derivaron de las coordenadas del marcador que ya estaban filtradas, no es necesario suavizarlas.

La presentación de datos cinemáticos angulares es similar a la presentada en cinemática lineal, siendo el formato más común el gráfico de  $\theta$ ,  $\omega$  o  $\alpha$  como función del tiempo a lo largo del movimiento un historial o «serie temporal».

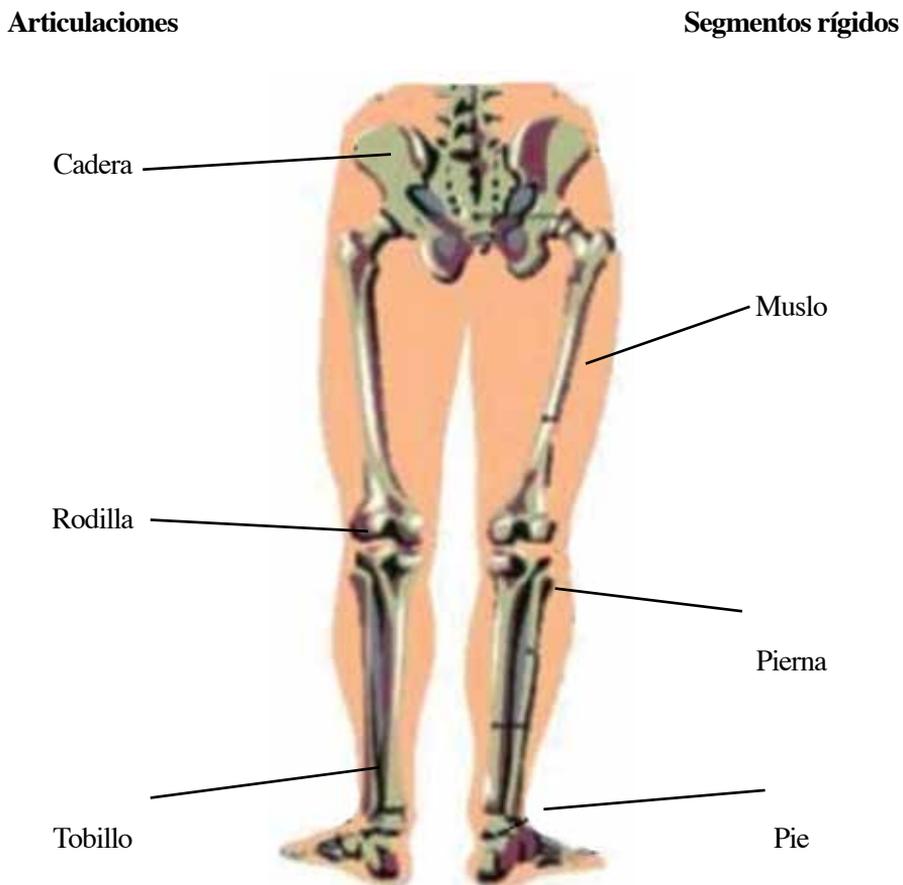
### a) Cinemática espacial o en 3-D

Esta segunda parte de datos biomecánicos amplía los conceptos vistos en cinemática 2-D o plana. La mayoría de los estudios cinemáticos se inician con la recopilación de datos de algún tipo de imagen o sistema de captura de movimiento humano, generalmente video. Al finalizar esta parte, se presentan ecuaciones para derivar el desplazamiento (ángulo de articulación) respecto al tiempo con el fin de obtener los datos biomecánicos: velocidades y aceleraciones angulares en 3-D.

Cabe indicar que un dispositivo para el análisis cinemático de la posición durante el ciclo de caminar se basa en el uso de la técnica de videogrametría (de-

rivada de la fotogrametría que se vale de imágenes de algún objeto tomadas desde varios puntos de vista para realizar una reconstrucción tridimensional). Con este fin, se usa una cámara de video digital para capturar el movimiento humano, en particular, para el caso que se estudia, de extremidades inferiores, en el plano sagital (véase fig. 2.7). A partir del desplazamiento de cierto número de marcadores sobre puntos anatómicos, se determinan los ángulos de articulación de la cadera, rodilla y tobillo (fig. 2.17) de la posición durante un ciclo de caminar (Díaz et al., 2013). Finalmente, con esta información, se exponen los modelos (ecuaciones) de los datos biomecánicos, de modo que se pueden comparar las curvas entregadas por el *software* y las curvas teóricas (Robertson et al., 2014).

Figura 2.17. Articulaciones y segmentos rígidos de las extremidades inferiores



Nota. En el gráfico se representa las articulaciones y segmentos rígidos de las extremidades inferiores.  
Fuente: Ortega y Congacha, 2021

### 2.3.1 Sistemas de coordenadas y el supuesto de segmentos rígidos

Se han considerado en la cinemática plana dos sistemas de coordenadas: global (GCS) y local (LCS). En esta parte, se utilizan coordenadas GCS que difieren de la especificación ISB. Por ejemplo para el caso de la biomecánica tridimensional, el eje Y representa la dirección principal de movimiento, el eje X es ortogonal al eje Y y el eje Z es perpendicular al plano X-Y (plano sagital) que es el plano para el análisis del movimiento humano. También se observa, en la figura 2.17, que una articulación se encuentra entre dos segmentos rígidos. Por ejemplo, la cadera está entre la pelvis y el muslo; la rodilla une el muslo y la pierna, y la articulación tobillo se encuentra entre los segmentos rígidos pierna y pie. Estas articulaciones van a ser necesarias al aplicar un modelo cinemático para que se visualice, a modo de gráfico, el valor de los ángulos de las articulaciones de las extremidades inferiores durante el ciclo de caminar. En efecto, se describen a continuación GCS y LCS para el espacio.

#### Sistema de coordenadas global: GCS.

El GCS se designa nuevamente como se describió en el plano, pero ahora usando letras mayúsculas XYZ. Los vectores unitarios para este GCS se indican por  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  (véase fig. 2.17). En la literatura biomecánica, el GCS es un sistema ortogonal diestro con un origen que se fija teniéndose en cuenta que un sistema de coordenadas es diestro si y solo si:

$$\hat{k} = \hat{i} \times \hat{j} \text{ y } \hat{i} \cdot \hat{j} = 0 \quad (2.14)$$

#### Sistema de coordenadas local: LCS

La suposición de rigidez en el contexto de la cinemática es que, en cada segmento, es definido un LCS fijo. Consecuentemente, si el segmento se mueve, también lo hace su LCS. De la misma forma a como se indicó GCS, LCS es también diestro y ortogonal. LCS se denota con letras minúsculas x, y, z y los vectores unitarios con  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ , y  $\hat{k}$ , respectivamente. También LCS está orientado de tal manera

que el eje y apunta hacia adelante, el eje z apunta axialmente (típicamente vertical), y el eje x es perpendicular al plano de los dos ejes con su dirección definida por la regla de la mano derecha. La orientación del LCS con respecto al GCS define la orientación del cuerpo o segmento en el GCS, y cambia a medida que el cuerpo o el segmento se desplaza a través del espacio tridimensional (véase fig. 2.18).

Figura 2.18. GCS y LCS, con vectores unitarios

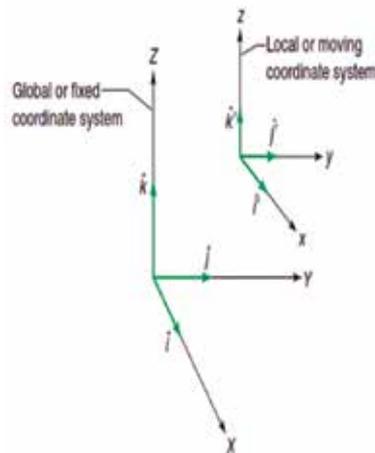
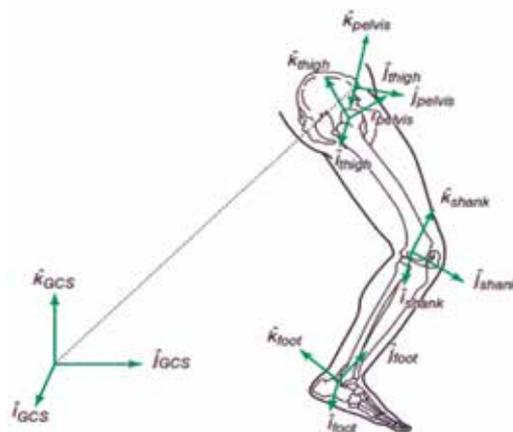


Figura 2.19. GCS y LCS, de la extremidad inferior derecha



Nota. El gráfico representa el sistema de coordenadas global y local: GCS y LCS de la extremidad inferior derecha.

Fuente: Robertson et al., 2014, p. 37

En la figura 2.18, se representa un sistema de coordenadas global o fijo, XYZ, con vectores unitarios,  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  y el sistema de coordenadas local o móvil, xyz, y sus vectores unitarios,  $\hat{i}'$ ,  $\hat{j}'$  y  $\hat{k}'$ . En la figura 2.19, se representa un sistema de coordenadas global y los sistemas de coordenadas local: GCS y LCS respectivamente de la extremidad inferior derecha.

### 2.3.2 Transformaciones de sistemas de coordenadas

Una transformación permite convertir coordenadas de un sistema a otro. Se han identificado dos tipos de sistemas de coordenadas —el GCS y el LCS— para la representación de datos biomecánicos en 3-D. Las descripciones de un segmento rígido que se mueve en el espacio en diferentes sistemas de coordenadas se pueden relacionar por medio de una transformación entre los sistemas de coordenadas (véase fig. 2.19). Las transformaciones más usuales que se consideran son lineal y rotacional.

#### Transformación lineal

La transformación lineal entre LCS y GCS se puede definir por un vector  $\vec{O}$ , que especifica el origen del LCS relativo al GCS. Véase la Fig. 2.20, donde un punto es descrito por el vector  $\vec{P}'$  en LCS y por  $\vec{P}$  en GCS. Las componentes de  $\vec{O}$  se escriben de la forma

$$\vec{O} = \begin{bmatrix} O_x \\ O_y \\ O_z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Si no asumimos ninguna rotación del LCS con GCS, la conversión de las coordenadas de un punto  $\vec{P}'$  en LCS a  $\vec{P}$  en GCS se puede expresar como:

$$\vec{P} = \vec{P}' + \vec{O} \quad (2.16)$$

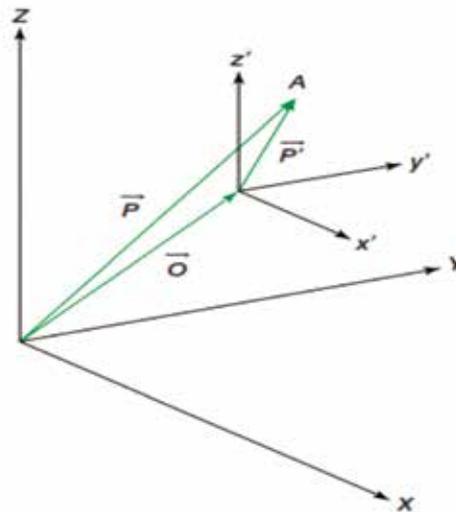
que en componentes se escribe:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O_x \\ O_y \\ O_z \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Consecuentemente, la conversión de las coordenadas de un punto  $\vec{P}$  en GCS a  $\vec{P}'$  en LCS se expresa como:

$$\vec{P}' = \vec{P} - \vec{O} \quad (2.18)$$

Figura 2.20. A definido por  $\vec{P}$  en XYZ, y por  $\vec{P}'$  en  $x'y'z'$ .



Nota. El gráfico representa el LCS en relación con el GCS.

Fuente: Robertson et al., 2014, p. 38

En la figura 2.20, se representa el vector  $\vec{P}$  en XYZ del punto A, mientras que en  $x'y'z'$  el mismo punto se define por el vector  $\vec{P}'$ . La transformación lineal entre  $x'y'z'$  y XYZ puede definirse mediante un vector  $\vec{O}$ , que especifica el origen del LCS en relación con el GCS.

### Transformación rotacional

Si no se asume ninguna translación del LCS en relación con el GCS, convertir las coordenadas de un punto  $\vec{P}$  en GCS a  $\vec{P}'$  en LCS puede expresarse como:

$$\vec{P}' = R\vec{P} \Rightarrow \vec{P} = R'\vec{P}' \quad (2.19)$$

donde R es una matriz formada por vectores unitarios ortogonales (matriz ortonormal) y R' es el inverso de R. Donde:

$$R = \begin{bmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ \hat{j}_x & \hat{j}_y & \hat{j}_z \\ \hat{k}_x & \hat{k}_y & \hat{k}_z \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Nótese que se utiliza R como la transformación de GCS a LCS y R' como la transformación de LCS a GCS.

Si consideramos la traslación y rotación del LCS en relación con el GCS, la conversión de las coordenadas de un punto P en GCS a P' en LCS puede expresarse como:

$$\vec{P}' = R(\vec{P} - \vec{O}) \quad (2.21)$$

Se logra la conversión despejando  $\vec{P}'$  de la ecuación 2.21; esto es  $\vec{P} = R'\vec{P}' + \vec{O}$ .

### 2.3.3 LCS para segmentos de la extremidad inferior

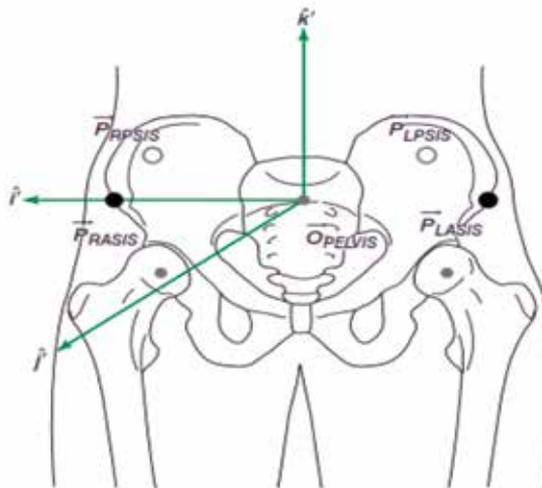
A continuación, se describe el LCS de los segmentos fijos de la extremidad inferior: pelvis, muslo, pierna y pie (véase fig. 2.14). Son necesarios tres puntos (o marcadores) no colineales para definir el LCS de un segmento. Además, el LCS se define por el origen y sus ejes mutuamente ortogonales y, para describirlo, se colocan marcadores en los segmentos fijos en puntos de referencia óseos palpables.

### 2.3.4. LCS para la pelvis

Se describe este sistema de coordenadas locales colocando marcadores en los siguientes puntos de referencia óseos palpables: espina dorsal ilíaca superior derecha e izquierda denotadas respectivamente por  $\vec{P}_{RASIS}$  y  $\vec{P}_{LASIS}$  y espina dorsal o columna ilíaca posterior-superior derecha e izquierda que se indican por  $\vec{P}_{RPSIS}$  y  $\vec{P}_{LPSIS}$  (véase fig. 2.21). El origen del LCS se encuentra entre  $\vec{P}_{RASIS}$  y  $\vec{P}_{LASIS}$  y se puede calcular de la siguiente manera:

$$\vec{O}_{PELVIS} = 0,5 * (\vec{P}_{RASIS} + \vec{P}_{LASIS}) \quad (2.22)$$

Figura 2.21. El origen ( $\vec{O}_{PELVIS}$ ), las espinas ilíacas superiores derecha e izquierda ( $\vec{P}_{RASIS}$  y  $\vec{P}_{LASIS}$ ) y las espinas ilíacas posterior-superiores ( $\vec{P}_{RPSIS}$  y  $\vec{P}_{LPSIS}$ )



Nota. El gráfico representa el LCS de la pelvis.  
Fuente: Robertson et al. 2014, p. 40

En la figura 2.21, el origen del LCS de la pelvis ( $\vec{O}_{PELVIS}$ ) se encuentra entre las espinas ilíacas superiores derecha e izquierda ( $\vec{P}_{RASIS}$  y  $\vec{P}_{LASIS}$ ) y las espinas ilíacas posterior-superiores ( $\vec{P}_{RPSIS}$  y  $\vec{P}_{LPSIS}$ ) que se pueden utilizar para derivar el LCS de la pelvis.

Para realizar la componente x (o dirección lateral) de la pelvis, se define el vector unitario  $\hat{i}$  restando  $\vec{O}_{PELVIS}$  de  $\vec{P}_{RASIS}$  y dividiendo para la norma del vector; es decir:

$$\hat{i} = \frac{\vec{P}_{RASIS} - \vec{O}_{PELVIS}}{\|\vec{P}_{RASIS} - \vec{O}_{PELVIS}\|} \quad (2.23)$$

A continuación se define un vector unitario desde el punto medio  $\vec{P}_{RPSIS}$  y  $\vec{P}_{LPSIS}$  hasta  $\vec{O}_{PELVIS}$ :

$$\hat{v} = \frac{\vec{O}_{PELVIS} - 0,5 * (\vec{P}_{RPSIS} + \vec{P}_{LPSIS})}{\|\vec{O}_{PELVIS} - 0,5 * (\vec{P}_{RPSIS} + \vec{P}_{LPSIS})\|} \quad (2.24)$$

Un vector unitario normal al plano (en la dirección superior) que contiene  $\hat{i}$  y  $\hat{v}$  se calcula a partir del producto cruz:  $\hat{k} = \hat{i} \times \hat{v}$ .

Nótese que el orden en el que se cruzan los vectores  $\hat{i}$  y  $\hat{v}$  para producir un vector de unidad superior se determina por la regla de la mano derecha. A este punto se ha definido la dirección lateral y la dirección superior. El unitario anterior se forma a partir del producto cruz:  $\hat{j} = \hat{k} \times \hat{i}$

La matriz de rotación que describe la orientación de la pelvis se utilizará más adelante se construye a partir de los vectores unitarios como  $R_{PELVIS} = R$ , donde R está indicada anteriormente en la ecuación (2.20).

## LCS para el muslo

El muslo se define por una posición virtual y dos posiciones de marcador: extremo proximal (y el origen) del muslo que coincide con la ubicación de un centro virtual de la articulación de la cadera (véase fig. 2.22). Para calcular un punto de referencia que representa el centro de articulación del LCS de la cadera  $\vec{P}_{RHIP}$  sobre la pelvis se utiliza:

$$R_{PELVIS} = \begin{bmatrix} 0,36 * \|\vec{P}_{RASIS} - \vec{P}_{LASIS}\| \\ -0,19 * \|\vec{P}_{RASIS} - \vec{P}_{LASIS}\| \\ -0,30 * \|\vec{P}_{RASIS} - \vec{P}_{LASIS}\| \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Se puede transformar la ubicación de la articulación del LCS de la cadera de la pelvis al GCS de la siguiente manera:

$$\underline{x_{t-q} + \dots + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + \dots + x_{t+q}}$$

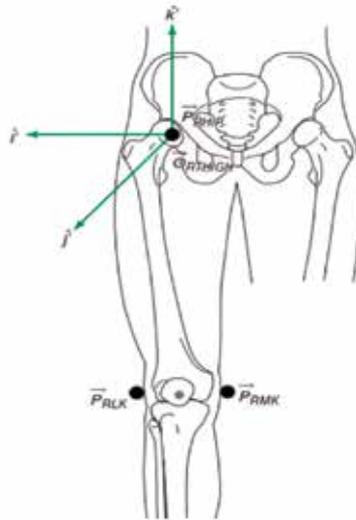
Para desarrollar el LCS del muslo, un vector superior unitario se crea a lo largo de un eje que pasa del extremo distal (punto medio entre los epicóndilo femorales  $\vec{P}_{RLK}$  y  $\vec{P}_{RMK}$  al origen ( $\vec{O}_{RTHIGH}$ ) como sigue:

$$\hat{k} = \frac{\vec{O}_{RTHIGH} - 0,5 * (\vec{P}_{RLK} + \vec{P}_{RMK})}{\|\vec{O}_{RTHIGH} - 0,5 * (\vec{P}_{RLK} + \vec{P}_{RMK})\|}$$

Luego se crea un vector unitario que pasa de la medial al epicóndilo femoral lateral

$$\hat{v} = \frac{\vec{P}_{RLK} - \vec{P}_{RMK}}{\|\vec{P}_{RLK} - \vec{P}_{RMK}\|} \quad (2.26)$$

Figura 2.22. El origen del LCS del muslo ( $\vec{O}_{RTHIGH}$ ), ( $\vec{P}_{RHIP}$ ) y los epicóndilos femorales laterales y mediales ( $\vec{P}_{RLK}$  y  $\vec{P}_{RMK}$ )



Nota. El gráfico representa el LCS del muslo.  
Fuente: Robertson et al., 2014, p. 41

En la figura 2.22 ( $\vec{O}_{RTHIGH}$ ) está en el centro de la articulación de la cadera. La posición del centro de articulación de la cadera ( $\vec{P}_{RHIP}$ ) y los epicóndilos femorales laterales y mediales ( $\vec{P}_{RLK}$  y  $\vec{P}_{RMK}$ ) se pueden utilizar para calcular el LCS del muslo.

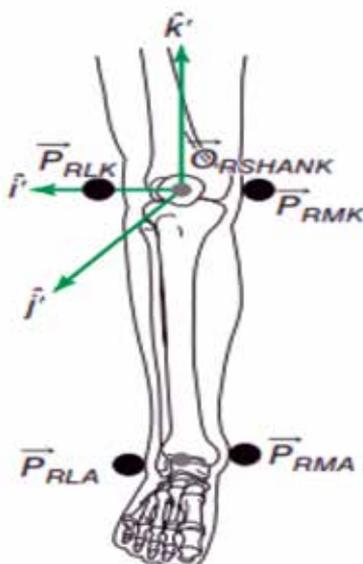
Y el vector unitario  $\hat{j} = \hat{k}' \times \vec{v}$  y la matriz de rotación que describe la orientación del muslo se construye de los vectores unitarios del muslo, es decir  $R_{RTHIGH} = R$ .

### LCS para la pierna o vástago

Para el segmento pierna, se define el LCS a partir de cuatro indicadores: maléolos lateral y medial  $\vec{P}_{RLA}$  y  $\vec{P}_{RMA}$  los epicóndilos femorales laterales y medial,  $\vec{P}_{RLK}$  y  $\vec{P}_{RMK}$  (fig. 2.23). El origen del LCS está en el punto medio entre los epicóndilo femorales y se puede calcular como:

$$\vec{O}_{RSHANK} = 0,5 * (\vec{P}_{RLK} + \vec{P}_{RMK}) \quad (2.27)$$

Figura 2.23. El origen ( $\vec{O}_{RSHANK}$ ), los epicóndilos laterales y mediales ( $\vec{P}_{RLK}$  y  $\vec{P}_{RMK}$ ) y el punto medio del maléolos lateral y medial ( $\vec{P}_{RLA}$  y  $\vec{P}_{RMA}$ )



Nota. El gráfico representa el LCS del vástago o pierna.

Fuente: Robertson et al. 2014, p. 41

En la figura 2.23, el origen de la pierna ( $\vec{O}_{RSHANK}$ ) se localiza en el punto medio de los epicóndilos lateral y medial ( $\vec{P}_{RLK}$  y  $\vec{P}_{RMK}$ ). Las posiciones de los epicóndilos laterales y mediales ( $\vec{P}_{RLK}$  y  $\vec{P}_{RMK}$ ) y el punto medio del maléolos lateral y medial ( $\vec{P}_{RLA}$  y  $\vec{P}_{RMA}$ ) se pueden utilizar para derivar la coordenada local sistema de un vástago sesgado proximal.

Para construir el LCS para la pierna, se comienza creando un vector unitario superior basado en un eje que pasa del extremo distal (punto medio entre los maléolos) al origen del segmento como sigue:

$$\vec{k}^s = \frac{\vec{O}_{RSHANK} - 0,5 * (\vec{P}_{RLA} + \vec{P}_{RMA})}{\|\vec{O}_{RSHANK} - 0,5 * (\vec{P}_{RLA} + \vec{P}_{RMA})\|} \quad (2.28)$$

A continuación, se crea un vector unitario que pasa del epicóndilo medial al epicóndilo lateral:

$$\hat{v} = \frac{\vec{P}_{RLK} - \vec{P}_{RMK}}{\|\vec{P}_{RLK} - \vec{P}_{RMK}\|} \quad (2.29)$$

Luego se crean los vectores unitarios  $\hat{j} = \hat{k} \times \hat{v}$  y  $\hat{i} = \hat{j} \times \hat{k}$  con  $R_{\text{RSHANK}} = R$ .

LCS para el pie

El LCS para pie se define a partir de cinco marcadores, dos colocados en los maléolos lateral y medial,  $\vec{P}_{RLA}$  y  $\vec{P}_{RMA}$ ; dos en la primera y quinta cabezas metatarsianas,  $\vec{P}_{RMH1}$  y  $\vec{P}_{RMH5}$ ; y uno en el calcáneo (fig. 2.24). El origen del LCS está en el punto medio entre los maléolos y se puede calcular como:

$$\vec{O}_{RFOOT} = 0,5 * (\vec{P}_{RLA} + \vec{P}_{RMA}) \quad (2.30)$$

El vector de la unidad dirigida axialmente se crea restando el punto medio de las cabezas metatarsianas  $\vec{P}_{RMH5}$  y  $\vec{P}_{RMH1}$  del origen  $\vec{O}_{RFOOT}$

$$\hat{k} = \frac{\vec{O}_{RFOOT} - 0,5 * (\vec{P}_{RMH5} + \vec{P}_{RMH1})}{\|\vec{O}_{RFOOT} - 0,5 * (\vec{P}_{RMH5} + \vec{P}_{RMH1})\|} \quad (2.31)$$

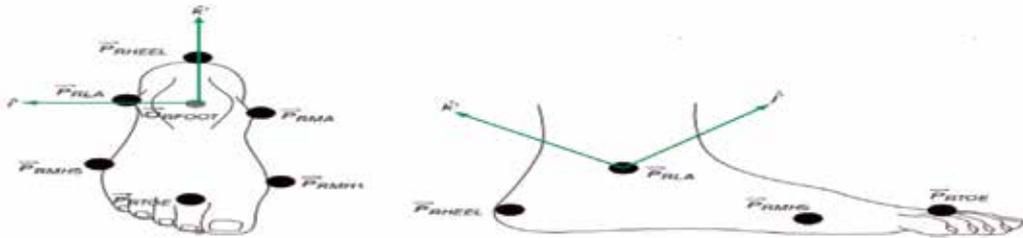
A continuación, se crea un vector unitario que pasa del maléolo intermedio al maléolo lateral como:

$$\hat{v} = \frac{\vec{P}_{RLA} - \vec{P}_{RMA}}{\|\vec{P}_{RLA} - \vec{P}_{RMA}\|} \quad (2.32)$$

y se crean los vectores unitarios  $\hat{j} = \hat{k} \times \hat{v}$  y  $\hat{i} = \hat{j} \times \hat{k}$ .

Por último, la orientación de la matriz de rotación del pie se puede describir utilizando los vectores de la unidad como:  $R_{\text{RFOOT}} = R$ .

Figura 2.24. El origen LCS del pie ( $\vec{O}_{RFOOT}$ ). Las posiciones de los maléolos ( $\vec{P}_{RLA}$  y  $\vec{P}_{RMA}$ ) y las cabezas metatarsianas primera y quinta ( $\vec{P}_{RMH1}$  y  $\vec{P}_{RMH5}$ )



Nota. El gráfico representa el LCS del pie.  
Fuente: Robertson et al., 2014, p. 44

En la figura 2.24, se representa el origen del sistema de coordenadas local LCS del pie ( $\vec{O}_{RFOOT}$ ) que se encuentra en el centro de la articulación del tobillo. Las posiciones de los maléolos lateral y medial ( $\vec{P}_{RLA}$  y  $\vec{P}_{RMA}$ ) y las cabezas metatarsianas primera y quinta ( $\vec{P}_{RMH1}$  y  $\vec{P}_{RMH5}$ ) se pueden utilizar para calcular el sistema de coordenadas local del pie.

### Estimación de la pose: seguimiento o rastreo de LCS de un segmento rígido de las extremidades inferiores

Estimación de la pose se refiere al estudio de la posición y orientación angular de las tres articulaciones (cadera, rodilla y tobillo) durante el ciclo de caminar.

Cabe recordar que una articulación se encuentra entre dos segmentos rígidos. Por ejemplo, la cadera está entre la pelvis y el muslo; la rodilla une el muslo y la pierna y la articulación tobillo se encuentra entre los segmentos rígidos pierna y pie (véase fig. 2.17). Estas articulaciones van a ser necesarias al aplicar un modelo cinemático.

En esta parte, se presentan tres algoritmos para estimar la pose de cuerpos rígidos de las extremidades inferiores. Se utiliza la nomenclatura de Lu y O'Connor (1999) para describirlos mediante:

- un método directo
- un método de optimización de segmentos
- un método de optimización global

Los tres algoritmos son independientes de los LCS de segmentos rígidos de extremidades inferiores.

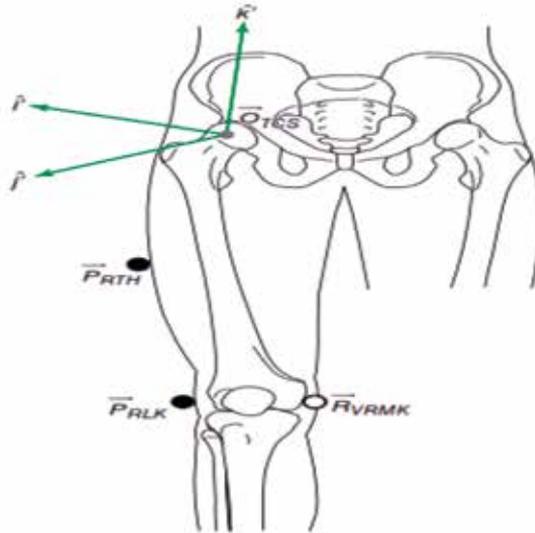
La posición y orientación de un segmento rígido requiere de seis variables independientes, generalmente referidas como grados de libertad: tres para especificar la posición del origen y tres para especificar la orientación. Esto significa que, para describir completamente la pose de un segmento (seis grados de libertad), debemos ubicar al menos tres puntos no colineales en el segmento.

### Estimación de la pose mediante el método directo

Este algoritmo calcula el LCS de cada segmento en movimiento de la misma manera que calcula el LCS en el ensayo durante el ciclo de caminar. Una limitación de este método directo es que no hay redundancia en los marcadores y no hay favoritismo en su colocación.

Para estimar la pose durante el ciclo de caminar en el que se ha eliminado el marcador de rodilla medial, se puede calcular una representación virtual del marcador que se puede utilizar para crear el LCS del muslo. Este marcador virtual se calcula en un sistema de coordenadas técnicas (TCS, de sus siglas en inglés *technical coordinate system*) definido por el centro de la articulación de la cadera, la rodilla lateral y el marcador de muslo adicional  $\vec{P}_{RTH}$  (ver Fig. 2.25). El origen del TCS se encuentra en el centro de articulación de la cadera.

Figura 2.25. Tres marcadores:  $\vec{O}_{TCS}$ ,  $\vec{P}_{RLK}$  y  $(\vec{P}_{RTH})$ . El origen ( $\vec{O}_{TCS}$ ) y un marcador virtual ( $R_{VRMK}$ )



Nota. El gráfico representa el LCS de la cadera.  
Fuente: Robertson et al., 2014, p. 46

En la figura 2.25, se observa un sistema de coordenadas técnico. Se define por tres marcadores:  $\vec{O}_{TCS}$  y  $\vec{P}_{RLK}$  y un marcador adicional en el muslo derecho ( $\vec{P}_{RTH}$ ). El origen del sistema de coordenadas técnicas ( $\vec{O}_{TCS}$ ) está en la cadera derecha ( $\vec{P}_{RHIP}$ ). El sistema de coordenadas local se define a partir de estos marcadores. Se puede crear un marcador virtual en la rodilla intermedia derecha ( $R_{VRMK}$ ).

Una primera limitación de este algoritmo directo es que solo tres marcadores se utilizan para definir el LCS, lo que significa que no hay redundancia en la representación del segmento. Si un marcador de rastreo es obstruido, el LCS no puede calcularse. Una segunda limitación del método directo es que no utiliza la suposición rígida del cuerpo (es decir, la distribución esperada de los marcadores no cambiará durante el movimiento) para minimizar los efectos del tejido blando. Por lo tanto, si hay un error en la ubicación de un marcador, normalmente resultará en un error directo en la estimación de LCS. Una tercera limitación del método directo es que todos los segmentos debajo de la pelvis utilizan el centro de articulación virtual creado por el segmento proximal al calcular su pose. Por lo

tanto, a medida que se calculan las poses de los segmentos, los errores se propagarán de los segmentos distales a proximal por toda la vinculación. Por ejemplo, los errores en la localización de un objetivo en la pelvis producirán errores en la localización de todos los otros segmentos. Una limitación adicional del método directo es que, debido a que el extremo distal del segmento en el lado proximal de la articulación y el extremo proximal del segmento en el lado distal de la articulación siempre comparten un punto en común (una ubicación central conjunta), no se pueden medir las traducciones conjuntas reales. En resumen, la estimación de pose directa es menos eficaz de los tres algoritmos de estimación de pose descritos en ese apartado.

### Estimación de la pose mediante el método de optimización de segmentos

El término optimización de segmentos fue dado por Lu y O'Connor (1999); se deriva del término seguimiento óptimo acuñado por Cappozzol et al. (1995). Sin embargo, la palabra **optimización** no debe interpretarse necesariamente como mejor rastreo o seguimiento. La optimización de segmentos también se conoce comúnmente como seis grados de libertad (seis DOF).

Para entender este algoritmo, se debe considerar el LCS de un segmento definido en el proceso mediante una matriz de rotación,  $R_{SEG}$ , y un origen,  $O_{SEG}$ . Considere tres marcadores de seguimiento ubicados en el segmento en la posición  $\vec{P}_i$  en el LCS y  $\vec{P}_i$  en el GCS (fig. 2.26):

$$\vec{P}_i = R_{SEG} \vec{P}_i + \vec{O}_{SEG}. \quad (2.33)$$

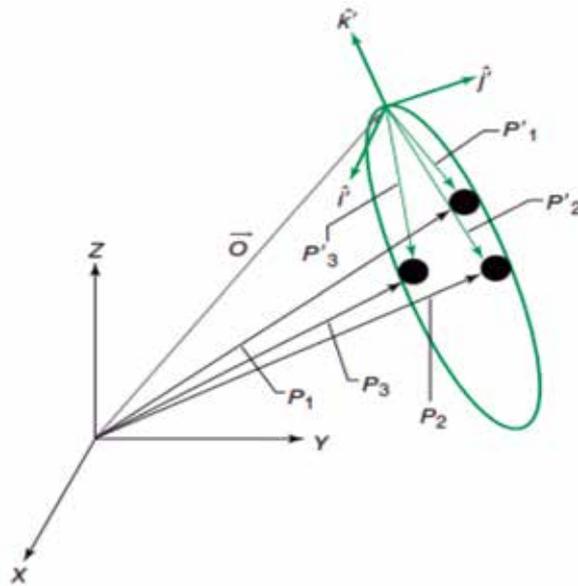
Si el segmento se mueve, la nueva matriz de orientación  $R'_{SEG}$  y el vector de translación  $\vec{O}_{SEG}$  pueden calcularse en cualquier momento, siempre que tres puntos no colineales  $\vec{P}_i$  estén predeterminados a partir del proceso y  $\vec{P}_i$  se registre en cada una de las imágenes de los datos de movimiento. La matriz,  $R'_{SEG}$  y el origen,  $\vec{O}_{SEG}$  se estiman minimizando la suma de la expresión de error de cuadrados como sigue:

$$E = \sum_{i=1}^m ((\vec{P}_i - R'_{SEG} \vec{P}_i) - \vec{O}_{SEG})^2, \quad (2.34)$$

bajo la restricción ortonormal.

$$R'_{SEG}R_{SEG} = I, \quad (2.35)$$

Figura 2.26. Relación entre GCS y LCS. Representación de marcadores  $P_1, P_2, y P_3$  en GCS (XYZ) y  $P'_1, P'_2, y P'_3$  en el LCS ( $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ )



Nota. El gráfico representa la relación entre los marcadores de seguimiento GCS y LCS.  
Fuente: Robertson et al., 2014, p. 48

En la figura 2.26, se representa la relación entre los marcadores de seguimiento o rastreo GCS y LCS. Los marcadores  $P_1, P_2, y P_3$  están representados en el GCS (XYZ) y también como  $P'_1, P'_2, y P'_3$  en el LCS con origen ( $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ) del segmento.

## Estimación de la pose mediante el método de optimización global

La optimización global es una extensión de la estimación de la pose mediante la optimización del segmento porque las soluciones son equivalentes si se atribuyen seis grados de libertad a todas las articulaciones. También se puede decir que la optimización global es la búsqueda, en cada base de datos, de una pose óptima de un modelo multienlace que minimiza las diferencias (en un sentido de mínimos cuadrados) entre las coordenadas del marcador medidas y determinadas por el modelo en todos los segmentos del cuerpo, en particular de las extremidades inferiores. Considera distribuciones de errores de medición en el sistema y proporciona un mecanismo de compensación de errores entre segmentos de las extremidades inferiores que pueden considerarse óptimos a nivel de sistema.

Matemáticamente, Van den Bogert et al. (2005) describieron la configuración de todo el cuerpo utilizando un conjunto de coordenadas generalizadas  $\vec{q}$ . Las coordenadas generalizadas son el conjunto mínimo de variables independientes que describen la posición y la orientación del modelo. Se puede extender la ecuación (2.20) a una función de las coordenadas generalizadas  $\vec{q}$  como sigue:

$$\vec{P}_i = R(\vec{q}) \vec{P}_i + \vec{O}(\vec{q}) \quad (2.36)$$

la expresión de la ecuación 2.21 se minimiza y se convierte en

$$E[\vec{q}] = \sum_{i=1}^m \{\vec{P}_i - R(\vec{q}) \vec{P}_i + \vec{O}(\vec{q})\}^2 \quad (2.37)$$

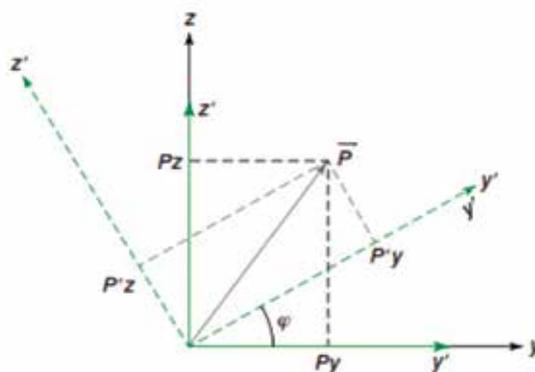
donde  $m$  es el número total de segmentos.

### 2.3.7 Ángulos de articulación

Un ángulo de articulación es la orientación relativa de un sistema de coordenadas local con otro sistema de coordenadas local, y es independiente de la posición del origen de estos sistemas de coordenadas. Los ángulos de articulación representan un reto conceptual para muchos biomecánicos, por lo que se intenta explicar cuidadosamente. Es importante que se tengan presentes lo siguiente:

1. Los ángulos de articulación no siempre se representan mediante una matriz de orientación, sino por una representación parametrizada de esta matriz, y a menudo el ángulo resultante no es un vector. Esto significa que los ángulos no se pueden sumar o restar, lo que hace que la especificación de un ángulo de referencia sea incómoda.
2. Existen articulaciones, como el hombro, para las cuales no existe una definición única de un ángulo de articulación que sea significativo desde el punto de vista anatómico para toda la gama de movimientos de la articulación.

Figura 2.27. Sistema de coordenadas  $yz$  cuando se gira a  $y'z'$  en un ángulo  $\phi$ , determina la transformación del vector  $\vec{P}$  en  $\vec{P}'$



Nota. El gráfico representa los sistemas de coordenadas se designan son  $xyz$  y  $x' y' z'$ .  
Fuente: Robertson et al., 2014, p. 50

3. Una serie de convenciones clínicas y deportivas especifican un ángulo relativo a un sistema de coordenadas basado en movimiento. Esto requiere la creación de sistemas de coordenadas virtuales que varían de un ensayo a otro, en lugar de la definición de los segmentos.
4. Los ángulos proyectados 2-D en los planos sagital, frontal y transversal, aunque conceptualmente sencillos de entender, no constituyen un ángulo 3-D. En realidad, notificar varias vistas planas de ángulos como si fueran un ángulo 3-D es incorrecto

Los sistemas de coordenadas en la figura 2.27 se designan con  $xyz$  y  $x'y'z'$ . La rotación se produce sobre los ejes  $x$  y  $x'$ , que no se muestran en esta figura. El vector  $\vec{P}$  se representa tanto en el sistema de coordenadas  $yz$  como  $(P_y, P_z)$  y en el sistema de coordenadas  $y'z'$  como  $(P'_y, P'_z)$ . Si el sistema de coordenadas  $yz$  se gira a  $y'z'$  mediante el ángulo  $\phi$ , una matriz de rotación se puede determinar para transformar el vector  $\vec{P}$  en  $\vec{P}'$ .

Para ilustrar la noción de un sistema de coordenadas rotacional, se observa una rotación en 2-D sobre un solo eje (en este caso, el eje  $x$ ). En la figura 2.27, los sistemas de coordenadas designados como  $xyz$  y  $x'y'z'$  inicialmente coinciden entre sí. Es decir, los orígenes son los mismos y los ejes  $y$  e  $y'$  son paralelos. El LCS  $x'y'z'$  es entonces girado desde la horizontal derecha del LCS  $xyz$  por un ángulo  $\phi$  (p. ej., rotación positiva sobre el eje  $x$ ). La matriz de rotación  $R_x$  que describe la transformación de  $P$  a  $P'$  en 2-D es:

$$R_x = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Un vector  $\vec{P}$  puede representarse en cualquier LCS, ya sea  $\vec{P} = \vec{P}_y, \vec{P}_z$  o  $\vec{P}' = \vec{P}'_y, \vec{P}'_z$  usando la matriz de rotación (ecuación 2.25). El vector  $P$  se puede transformar en  $P'$  de la siguiente manera:

$$\vec{P}' = R_x \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = R_x^{-1} \vec{P}'. \quad (2.39)$$

Se observa en la ecuación 2.26, que el vector  $\vec{P}'$  se puede transformar en  $\vec{P}$ .

Se pueden utilizar varios métodos para parametrizar la orientación relativa de dos sistemas de coordenadas por ejemplo, los citados en Grood y Suntay (1983), Spoor y Veldpaus (1980) y Woltring (1991). En este apartado se presentan tres de los métodos más utilizados:

- Cardano-Euler
- Sistema de coordenadas de la articulación
- Ángulo helicoidal

### Ángulos de Cardano-Euler

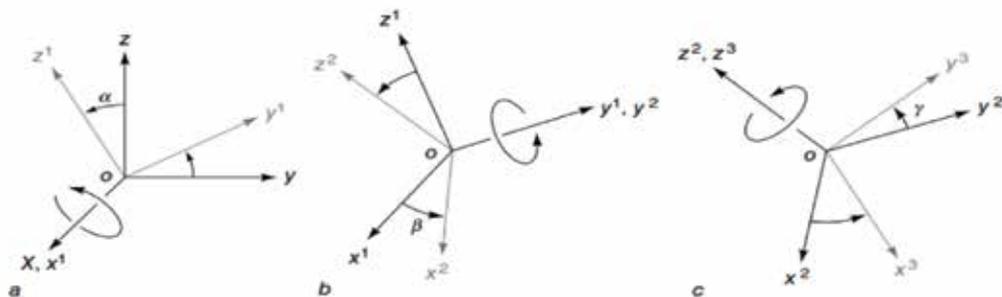
Una matriz de rotación 3-D indica la orientación de un LCS con respecto a otro LCS que puede representarse mediante tres rotaciones sucesivas sobre ejes únicos. Esto significa que tres elementos (ángulos) especifican completamente las nueve componentes de una matriz de rotación de  $3 \times 3$ . El orden de las rotaciones es muy importante y, para mayor claridad, se describe una secuencia en particular y se hacen otras tres.

La secuencia de rotación de Cardano XYZ se utiliza a menudo en biomecánica (Cole et al., 1993). Esta secuencia implica tres pasos:

1. Rotación sobre el eje lateralmente dirigido (X)
2. Rotación sobre el eje de dirección anterior (Y)
3. Rotación sobre el eje vertical (Z)

Recuerde que el eje X se dirige lateralmente para los segmentos del lado derecho y medialmente para los segmentos del lado izquierdo. Esta secuencia de rotaciones se muestra en la figura 2.28.

Figura 2.28. Serie de ángulos de rotaciones Cardano XYZ  
 (a) primero sobre el eje  $x^1$   $\alpha$ , (b) sobre el nuevo eje  $y^1$   $\beta$  y (c) el eje  $z^2$   $\gamma$ .

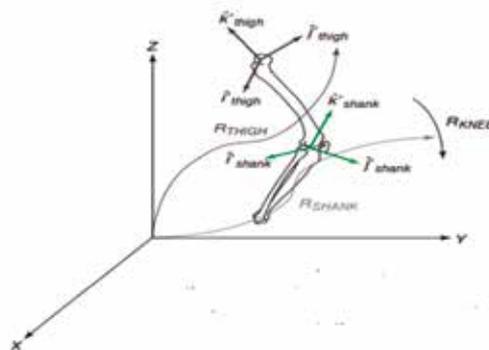


Nota. El gráfico representa la serie de Cardano XYZ de rotaciones.  
 Fuente: Robertson et al., 2014, p. 51

Véase, en la figura 2.28, la secuencia de ángulos de Cardano de rotaciones primero sobre el eje  $x^1$  que coincide con X del sistema de coordenadas estacionarias; luego en el nuevo eje  $y^1$  y finalmente sobre el eje  $z^2$ .

Usando la figura 2.28, se ve que la primera rotación ( $\alpha$ ) tiene lugar sobre el eje X y conduce a nuevas orientaciones de los ejes y y z ( $y^1$  y  $z^1$ ), con el eje X restante en la misma orientación y ahora etiquetada  $x^1$ . La segunda rotación ( $\beta$ ) sobre el eje  $y^1$  conduce a nuevas posiciones de los ejes  $x^1$  y  $z^1$  ( $x^2$  y  $z^2$ ). Para la tercera rotación ( $\gamma$ ) sobre el eje  $z^2$ , los ejes  $x^2$  e  $y^2$  asumen la nueva orientación de  $x^3$  y  $y^3$ .

Figura 2.29. Ángulo de articulación de la rodilla en relación con el muslo



Nota. El gráfico representa el ángulo de articulación de la rodilla.  
 Fuente: Robertson et al., 2014, p. 51

En la figura 2.29, se observa un ángulo de articulación que es la orientación relativa de un segmento a otro. En este ejemplo, el ángulo de articulación de la rodilla es la orientación de la pierna en relación con el muslo.

Al elaborar la matriz de rotación para el sistema de coordenadas XYZ, se demuestra cómo extraer los tres ángulos de Cardano. Los ángulos para el sistema XYZ se designan  $\alpha$  (alfa) para la primera rotación,  $\beta$  para la segunda rotación y  $\gamma$  para la tercera rotación. La matriz de rotación R para una serie de rotaciones XYZ es:

$$R = R_z R_y R_x \quad (2.40)$$

Donde:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} R_y = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\text{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} R_z = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \text{sen}\gamma & 0 \\ -\text{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

La matriz de rotación se calcula multiplicando las tres matrices de la ecuación (2.41) para generar:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\beta & \cos\gamma\text{sen}\beta\text{sen}\alpha + \text{sen}\gamma\cos\alpha & \text{sen}\gamma\text{sen}\alpha - \cos\gamma\text{sen}\beta\cos\alpha \\ -\text{sen}\gamma\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma - \text{sen}\gamma\text{sen}\beta\text{sen}\alpha & \text{sen}\gamma\text{sen}\beta\cos\alpha + \cos\gamma\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\beta & -\cos\beta\text{sen}\alpha & \cos\beta\cos\alpha \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Los elementos de la matriz combinada representan la orientación relativa de un LCS relativo al GCS. Esta matriz a menudo se denomina **matriz de descomposición**. Los cálculos de los ángulos Cardano se derivan directamente de la matriz R de la ecuación 2.29. El ángulo  $\alpha$  se calcula a partir de los elementos de posición de la matriz R: (3, 2) y (3, 3) como sigue:

$$\alpha = \tan^{-1} \left\{ \frac{-R_{32}}{R_{33}} \right\} \quad (2.43)$$

el ángulo  $\beta$  se calcula a partir de los elementos de posición de la matriz R: (1, 1), (2, 1) y (3, 1) como sigue:

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{R_{31}}{\sqrt{R_{11}^2 + R_{21}^2}} \right). \quad (2.44)$$

El ángulo  $\gamma$  se calcula a partir de los elementos de posición de la matriz R: (2, 1) y (1, 1) como sigue:

$$\gamma = \tan^{-1} \left( \frac{-R_{21}}{R_{11}} \right). \quad (2.45)$$

Si se calcula  $\tan^2$  en lugar de  $\tan^{-1}$ , entonces el rango de las tres componentes está en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  radianes.

La derivación de un ángulo de segmento se puede extender a la derivación de uno de articulación, que es la rotación de un segmento LCS en otro segmento LCS. El movimiento en una articulación se define a menudo como la orientación de un segmento distal en relación con un segmento proximal Woltring (1991). Por ejemplo, los ángulos de articulación de la rodilla se pueden calcular como la orientación del vástago en relación con el muslo. El cálculo de un ángulo de articulación requiere un paso adicional para el cálculo de un ángulo de segmento porque los dos segmentos que se utilizan tienen matrices de rotación que describen su orientación en relación con el laboratorio GCS.

La transformación del segmento muslo del sistema LCS al sistema GCS fue presentada como  $R_{RTHIGH}$  en la ecuación (2.36). La transformación del vástago del sistema LCS al sistema GCS fue presentada como  $R_{RSHANK}$  en la ecuación 2.42. La transformación del LCS del vástago al muslo LCS se puede expresar como sigue

$$R_{RKNEE} = R_{RSHANK} R'_{RTHIGH}, \quad (2.40)$$

donde  $R'_{RTHIGH}$  es la transposición de la matriz de LCS del muslo.

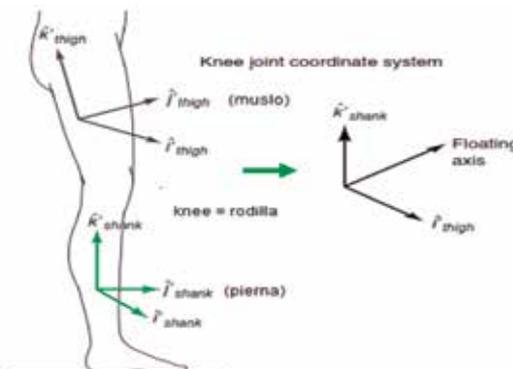
Los ángulos de Cardano pueden derivarse de la matriz de rotación  $R_{RKNEE}$  utilizando las ecuaciones (2.43), (2.44) y (2.45).

## Sistema de coordenadas de la articulación

En el sistema de coordenadas de la articulación JCS, siglas en inglés de *joint coordinate system*, se propuso por primera vez para describir el movimiento de la articulación de la rodilla en Grood y Suntay (1983) y desde entonces se ha aplicado a las otras articulaciones de las extremidades inferiores llámese cadera y tobillo. El método fue desarrollado para que las tres rotaciones entre los segmentos del cuerpo tuvieran un significado funcional y anatómico.

El enfoque JCS utiliza un eje de coordenadas de cada LCS de los dos segmentos que constituyen la unión. En el ejemplo de la rodilla (une los segmentos muslo y pierna) (véase la figura 2.30), el eje longitudinal del JCS es el eje z del LCS del segmento distal ( $\hat{k}_{shank}$ ) y el eje dirigido lateralmente es el eje x del LCS del segmento proximal ( $\hat{i}'_{thigh}$ ). El tercer eje es un eje de flotación que es el producto cruz de los ejes longitudinal y lateral y por lo tanto es perpendicular al plano formado por estos ejes dirigidos ( $\hat{k}_{shank} \times \hat{i}'_{thigh}$ ). Debe quedar claro que los ejes verticales y laterales de este sistema no son necesariamente perpendiculares. El JCS no es, por lo tanto, un sistema ortogonal. En la figura 2.30, se presenta esquemáticamente el JCS por un instante para la articulación de la rodilla.

Figura 2.30. JCS de la rodilla. El eje vertical  $\hat{k}$  del LCS de la pierna; el eje mediolateral  $\hat{i}$  - del muslo, y su eje flotante



Nota. El gráfico representa el sistema de coordenadas de la articulación JCS de la rodilla.  
Fuente: Robertson et al., 2014, p. 55

En la figura 2.30, se representa JCS de la rodilla. El eje vertical es el eje  $\hat{k}$  del LCS de la pierna; el eje mediolateral es el eje  $\hat{i}$  - del LCS del muslo, y el eje flotante se calcula por el producto cruz  $\hat{k} \times \hat{i}$ .

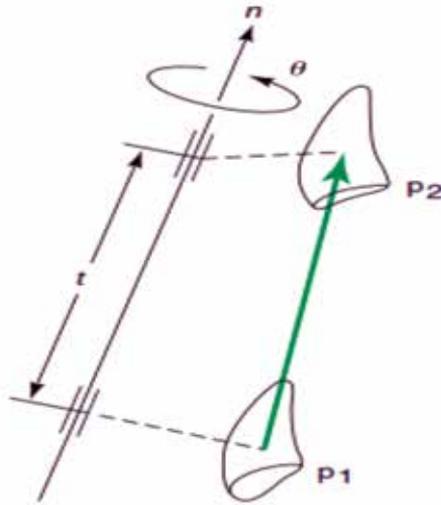
Los ángulos del JCS se designan como  $\alpha$  para flexión-extensión,  $\beta$  para abducción-aducción, y  $\gamma$  para rotación externa-interna, con exactamente el mismo significado que en los ángulos de Cardano presentados anteriormente. Se supone que la flexión-extensión es una rotación sobre el eje lateral del segmento proximal ( $\hat{i}_{thigh}$ ), la abducción-aducción es una rotación sobre el eje flotante ( $\hat{k}_{shank} \times \hat{i}_{thigh}$ ) y la rotación axial es una rotación sobre el eje vertical del segmento distal ( $\hat{k}_{shank}$ ). Se ha demostrado que el JCS es equivalente a una secuencia de rotación de Cardano XYZ descrita anteriormente, pero solo cuando el segmento proximal es el segmento de referencia (Cole et al., 1993).

### Ángulos helicoidales

Otro método para parametrizar la orientación de un LCS a otro LCS se basa en el eje helicoidal finito o eje de tornillo (Woltring et al., 1985; Woltring, 1991). En esta técnica, se definen un vector de posición y un vector de orientación. Cualquier movimiento finito desde una posición de referencia puede describirse en términos de rotación y traslación a lo largo de una sola línea o eje dirigido (es decir, el eje helicoidal o de tornillo) en el espacio con dirección unitaria  $\vec{n}$  (fig. 2.31). Hay que tener en cuenta que en muchos casos este eje no coincidirá con ninguno de los ejes definidos en el LCS de los segmentos.

En la figura 2.31, se representa un eje helicoidal finito que se define a partir de la traslación ( $t$ ) y una rotación ( $\theta$ ) sobre el eje helicoidal ( $\vec{n}$ ) del punto  $P_1$  al punto  $P_2$ .

Figura 2.31. Eje helicoidal ( $\vec{n}$ ) de los puntos P1 y P2



Nota. El gráfico representa el sistema de coordenadas de la articulación JCS.  
Fuente: Robertson et al., 2014, p. 56

El vector de orientación se define a partir de la matriz de rotación  $R'$  calculada previamente (véase la ecuación (2.39)). Los componentes del vector de orientación se calculan utilizando las relaciones descritas por Spoor y Veldpaus (1980). Las componentes de orientación se pueden determinar como:

$$\text{sen}\theta\vec{n} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_{23} - R_{32} \\ R_{31} - R_{13} \\ R_{12} - R_{21} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Si el producto escalar de  $\vec{n}$  es 1, es decir  $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$  y  $\text{sen}\theta \leq 1/2\sqrt{2}$ , se puede usar la siguiente ecuación para resolver el  $\text{sen}\theta$ :

$$\text{sen}\theta = \frac{1}{2} \sqrt{(R_{23} - R_{32})^2 + (R_{31} - R_{13})^2 + (R_{12} - R_{21})^2}. \quad (2.48)$$

Sin embargo, si el  $\text{sen}\theta > 1/2\sqrt{2}$ , se puede utilizar la siguiente ecuación para resolver el  $\text{cos}\theta = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1)$ .

Se puede entonces calcular el vector unitario,  $\vec{n}$ , a lo largo del eje helicoidal como:

$$\vec{n} = \frac{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_{23} - R_{32} \\ R_{31} - R_{13} \\ R_{12} - R_{21} \end{bmatrix}}{2\text{sen}\theta} \quad (2.49)$$

Despejando de la ecuación (2.48) el ángulo  $\theta$  se obtiene:

$$\theta = \text{sen}^{-1} \left( \frac{1}{2} \sqrt{(R_{23} - R_{32})^2 + (R_{31} - R_{13})^2 + (R_{12} - R_{21})^2} \right) \quad (2.50)$$

$$\text{ó } \theta = \text{cos}^{-1} \left( \frac{R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1}{2} \right)$$

Hay algunas observaciones que se presentan entre los métodos para parametrizar la orientación relativa de dos sistemas de coordenadas LCS: Cardano-Euler y de JCS y ángulos helicoidales.

1. De los métodos que se presentaron, las de Cardano-Euler y de JCS son las más utilizadas para calcular los ángulos de las articulaciones tridimensionales. Ninguno de estos dos enfoques parece tener ventajas o desventajas obvias sobre el otro. De hecho, el principio de los dos enfoques es el mismo, y, para el sistema de coordenadas XYZ, los ángulos calculados por cada uno deben dar exactamente los mismos resultados. Sin embargo, hay ventajas y desventajas en relación con el uso de ángulos helicoidales.
2. La mayor ventaja de los ángulos de Cardano-Euler sobre los ángulos helicoidales es que los ángulos de Cardano-Euler son ampliamente utilizados en biomecánica y proporcionan una representación anatómica bien definida de los ángulos de las articulaciones de las extremidades inferiores. El sistema de coordenadas XYZ no tiene un significado anatómico si la rotación Y es mayor que aproximadamente 40° de abducción y, en el caso de bloqueo de Cardano (cuando la segunda rotación es igual a  $\pm 90^\circ$ ), no tiene ningún significado en absoluto. Sin embargo, esto es generalmente un problema mucho más grande en la extremidad superior que en la extremidad inferior.

3. Los ángulos helicoidales son especialmente apropiados cuando la rotación es muy pequeña. Además, eliminan el problema de bloqueo de Cardano. Sin embargo, la representación del movimiento de la articulación proporcionada por ángulos helicoidales no siempre se corresponde con una representación anatómica que es significativa. Además, los ángulos helicoidales son muy sensibles a los datos de coordenadas ruidosas. Por lo tanto, los datos de coordenadas deben ser significativamente suavizados antes de que se calculen los ángulos helicoidales.
4. Los ángulos de las articulaciones parametrizan la matriz de rotación, que representa la transformación de un sistema de coordenadas del segmento en otro sistema de coordenadas del segmento. Por lo tanto, los ángulos de articulación dependen directamente de la orientación del segmento LCS. Sin embargo, muchos investigadores prefieren afirmar que la pose del pie debe considerarse una pose de referencia a partir de la cual se calculan todos los ángulos de articulación. En otras palabras, todos los ángulos de articulación en la pose del pie deben considerarse como cero. Hacer referencia a un ángulo de articulación a una pose de referencia se denomina **normalización del ángulo**.
5. El proceso de normalización es mucho más complicado de lo que muchas personas sospechan porque los ángulos de articulación no son vectores. Esto significa que no se pueden sumar ni restar. Por lo tanto, un ángulo de articulación normalizado no se calcula simplemente restando el ángulo de articulación en la pose de referencia desde el ángulo de articulación calculado en una matriz de datos.
6. La matriz de rotación que define la orientación relativa de un segmento,  $R_{Seg}$ , con un segmento de referencia,  $R_{Ref}$ , se puede expresar como:

$$R = R_{Seg}R_{Ref}^{-1} \quad (2.51)$$

7. Para un ángulo de articulación normalizado, la matriz de rotación debe incluir la orientación de los segmentos en la pose de calibración de los vectores  $R_{CalSeg}^{-1}R_{Seg}$  y  $(R_{CalRef}^{-1}R_{Ref})^{-1}$  y se expresa de la siguiente manera:

$$R = (R_{CalSeg}^{-1}R_{Seg})(R_{CalRef}^{-1}R_{Ref})^{-1} \quad (2.52)$$

8. Los ángulos de articulación normalizados se pueden extraer de R como se hizo anteriormente. Uno de los riesgos de esta forma de normalización es que las poses de referencia pueden dar lugar a bloqueo de Cardano en relación con los ensayos de movimiento. Esto puede ocurrir si el sujeto en el ensayo permanente está orientado perpendicularmente al ensayo de movimiento.
9. Una manera explícita (y equivalente) de forzar la postura de referencia para representar un ángulo cero es definir todos los sistemas de coordenadas del segmento en la prueba constante para tener exactamente la misma orientación. Una manera de lograrlo es ignorar los puntos de referencia anatómicos y obligar a todos los segmentos a alinearse con el sistema GCS. El efecto es el mismo que el cálculo del ángulo de articulación normalizado previamente descrito.

Algunos investigadores utilizan la normalización con la intención de eliminar los errores en la determinación de los sistemas de coordenadas del segmento causados por la colocación errónea de los marcadores. En efecto, estos investigadores asumen que hacer de la postura de referencia un ángulo cero resultará en uniformidad entre sujetos y sesiones de recolección de datos (por ejemplo, el ángulo cero tendrá un significado coherente). Esta suposición es errónea porque los sistemas de coordenadas pueden seguir siendo incorrectos. La postura de referencia puede efectivamente tener un ángulo común de cero para la postura de referencia en todas las sesiones, pero si los sistemas de coordenadas del segmento no están alineados consistentemente entre las sesiones, no se garantizará que la postura que no sea la postura de referencia sea equivalente «Observe que un reloj detenido es correcto dos veces al día»

### **2.3.8 Datos funcionales de la biomecánica: velocidad angular y aceleración angular según Cardano.**

En un análisis bidimensional, para obtener la velocidad angular de la articulación, el ángulo de articulación se diferencia con respecto al tiempo, y para la aceleración angular, el ángulo de la articulación se puede diferenciar dos veces

con respecto al tiempo. Sin embargo, en un análisis tridimensional, la derivada de los ángulos de articulación ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) no es equivalente a la velocidad angular de la articulación ni es el doble de la derivada igual a la aceleración angular porque los ángulos de Cardano no son vectores.

Se puede calcular la velocidad angular de un segmento en relación con el GCS diferenciando la matriz de rotación usando diferencias finitas. La velocidad angular  $\omega_i$  en el tiempo  $t_i$  se calcula a partir de la transformación entre la matriz de rotación  $R_{t_{i-1}}$  en el momento  $t_{i-1}$  y  $R_{t_i}$  en el tiempo  $t_i$  como sigue:

$$R_{\Delta} = R_{t_{i+1}} R_{t_{i-1}} \quad (2.53)$$

$$\|\omega_i\| = \frac{\delta}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (2.54)$$

donde  $\delta = \cos^{-1} \left( \frac{R_{\Delta 11} + R_{\Delta 22} + R_{\Delta 33} - 1}{2} \right)$ .

Se puede calcular el vector unitario como:

$$\vec{v} = \frac{\begin{bmatrix} R_{\Delta 23} - R_{\Delta 32} \\ R_{\Delta 31} - R_{\Delta 13} \\ R_{\Delta 12} - R_{\Delta 21} \end{bmatrix}}{2 \operatorname{sen} \delta} \quad (2.55)$$

y transformar el vector unitario en el sistema de coordenadas GCS desde que comenzó la rotación relativa

$$\hat{u} = R_{t_{i-1}}^* \hat{v} \quad (2.56)$$

El vector de velocidad angular es por lo tanto

$$\omega_i = \|\omega_i\| \hat{u} \quad (2.57)$$

La velocidad angular de la articulación es un vector que describe la velocidad angular relativa de un segmento a otro. En este caso, la matriz de rotación R puede sustituirse por la matriz de rotación determinada mediante la Ecuación 2.39.

La velocidad angular de articulación,  $\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$  se puede expresar en términos de las derivadas de los ángulos de Cardano,  $\dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$ , transformando las rotaciones segunda y tercera de nuevo en el primer sistema de coordenadas de rotación de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_x \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_x R_y \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Puesto que la velocidad angular es un vector, se puede calcular la aceleración angular,  $\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}$ , como la primera derivada de la velocidad angular:

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

## **CAPÍTULO III.**

### **PRINCIPALES TÉCNICAS DE FDA EN BIOMECÁNICA**

En este capítulo, se presentan las principales técnicas o métodos de FDA que se pueden aplicar a los datos biomecánicos, que toman en cuenta ruido en las señales recopiladas de las trayectorias de los marcadores. Se describen algunas técnicas de suavización de curvas, comenzando en este apartado con las de procesamiento de señales y finalizando con el desarrollo de splines cúbicos, que es una técnica muy útil para transformar datos discretos en datos funcionales o curvas. Luego se realiza un análisis exploratorio y se considera el método del análisis en componentes principales funcionales, FPCA, siglas en inglés de functional principal component analysis para seleccionar la mejor combinación de variables que identifiquen las características esenciales del movimiento humano y reduzcan la dimensión del espacio, debido a que los datos funcionales se encuentran en espacios de dimensión infinita.

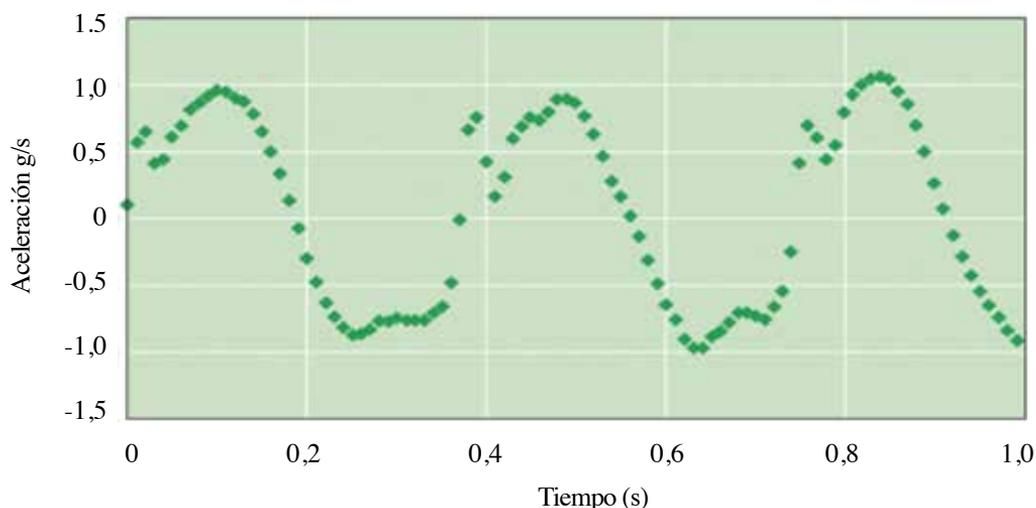
Antes de desarrollar las técnicas de FDA en biomecánica, cabe destacar que, en el capítulo I, los datos funcionales de biomecánica o simplemente datos biomecánicos se describieron como «curvas». En este apartado, las curvas de los datos del movimiento humano durante el ciclo de caminar se describen como «señal forma de onda».

Una señal forma de onda es una variable definida en el tiempo o en el espacio, que transmite información con datos no deseados llamados «ruido». Son ejemplos las señales de forma de onda el desplazamiento, el sonido, el voltaje, la corriente, el campo magnético, entre otras magnitudes físicas. Estas señales están presentes en todas las manifestaciones del tiempo o del espacio y son también llamadas «continuas o analógicas». Para mayor comodidad y para permitir la manipulación mediante software informático, a menudo se convierten las señales continuas en una serie de valores discretos para lo cual se utilizan convertidores de señal analógica a digital (fig. 3.1). Se puede invertir esta situación mediante convertidores de señal digital a analógica para que una señal digital pueda visualizarse electrónicamente.

En el capítulo II, se realizó la medición de datos biomecánicos del movimiento humano, específicamente de las extremidades inferiores tanto lineal como angular en la cinemática 2-D y 3-D. Se midieron los ángulos de articulación de la flexión-extensión, «cadera», la abducción-aducción, «rodilla», y la rotación axial, «tobillo». El desarrollo de nuevas tecnologías informáticas ha permitido a los biomecánicos utilizar métodos más sofisticados y construir experimentos mucho más complejos. Como resultado, los estudios de biomecánica a menudo generan grandes cantidades de datos «señales forma de onda». La característica común de estos es tener una dimensión grande y que pueden representarse como curvas.

El análisis de estos datos biomecánicos es un reto y, aunque se han explorado varios procedimientos, no se ha establecido ninguna técnica estándar para el análisis de los datos de estas curvas. Los estudios experimentales a menudo ayudan a determinar diferencias en tales conjuntos de datos entre varios grupos de individuos; por ejemplo, diferencias entre los sujetos lesionados y de control, diferencias entre atletas agrupados según el nivel de habilidad, diferencias entre los niños en varios niveles de desarrollo o cambios en los patrones de movimiento en respuesta a alguna forma de intervención.

Figura 3.1. Señal de muestreo a 100 Hz



Nota. El gráfico representa una digitalizada discreta de la aceleración.  
Fuente: Robertson et al., 2014, p. 279

En la figura 3.1, se representa la forma discreta digitalizada de la aceleración de la cabeza de un individuo mientras está en movimiento. La señal se muestreó a 100 Hz (100 ciclos por segundo).

La mayoría de las señales biomecánicas tienen la forma de la función seno y se llaman «senoidales». Una señal senoidal tiene cuatro características: *frecuencia* ( $f$ ), *amplitud* ( $a$ ), *desfase* ( $a_0$ ) y *ángulo de fase* ( $\theta$ ). Estas características se representan en los esquemas de la figura 3.2.

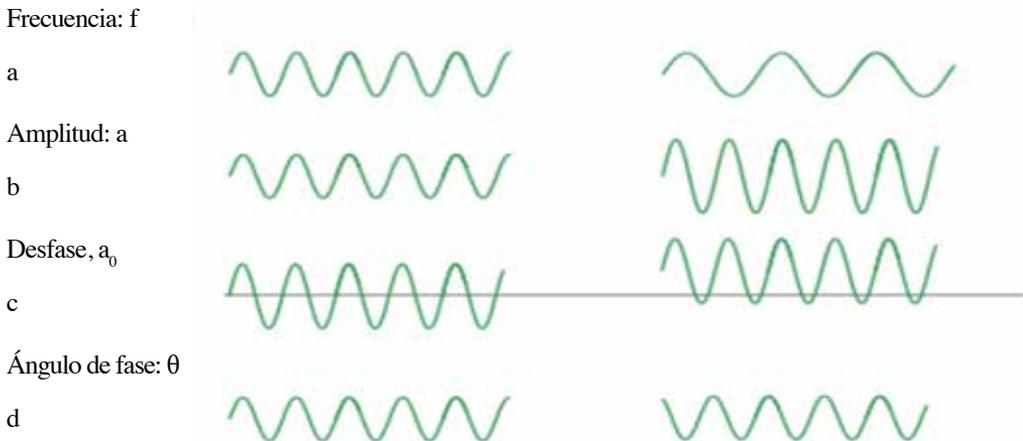
**Frecuencia:**  $f$  representa la rapidez con la que oscila la señal; generalmente se mide en hertz (un hertz es igual a 1 ciclo por segundo) (véase fig. 3.2a).

**Amplitud,**  $a$  cuantifica la magnitud de las oscilaciones (véase fig. 3.2b).

**Desfase,**  $a_0$  o desplazamiento de DC, (siglas en inglés de *direct current*, corriente directa en español) y representa el valor medio de la señal (véase fig. 3.2c).  $a_0$  es la cantidad de tiempo que la señal puede estar retrasada o desplazada.

**Ángulo de fase,**  $\theta$  o desplazamiento de fase (véase fig. 3.2d).

Figura 3.2. Características de una señal senoidal



Nota. En los gráficos, se representan las denominaciones: a, b, c y d, correspondientes a las características de la señal senoidal.

Fuente: Robertson et al., 2014, p. 280

En la figura 3.2, se indican cuatro características de una señal senoidal que varía en el tiempo.

Una señal que varía en el tiempo se denota y se define por sus características

$$\begin{aligned}w(t) &= a_0 + a \operatorname{sen}(2\pi ft + \theta) \\ &= a_0 + a \operatorname{sen}(\omega t + \theta),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde la frecuencia angular es  $\omega = 2\pi f$ . Además,  $f$  está en hertz,  $\omega$  está en radianes por segundo y hay  $2\pi$  radianes en un ciclo.

### 3.1 SUAVIZACIÓN DE CURVAS (DATOS BIOMECÁNICOS)

Se ha indicado al inicio de este capítulo, que una forma de onda es una señal con ruido, es decir:

$$\text{Datos biomecánicos} \equiv \text{Forma de onda} \equiv \text{señal} + \text{ruido}\tag{3.2}$$

Los errores o ruido asociados con la medición de una señal se producen, por ejemplo, por los marcadores colocados en las extremidades inferiores para medir el movimiento humano al digitalizar incorrectamente dispositivos como el acelerómetro. Este ruido a menudo tiene características que son diferentes de una señal. El ruido es típicamente no determinista, menor en amplitud y a menudo en un rango de frecuencia diferente de la señal. Si se traza la señal con el ruido, se vería como la figura 3.3. El objetivo de suavizar es eliminar el ruido, pero sin afectar la señal. El problema principal es como transformar los datos funcionales biomecánicos discretos en una buena estimación de la función subyacente.

Los datos biomecánicos, ahora «señales temporales», se obtienen generalmente a lo largo de un número de puntos de tiempo discreto y se supone que son generados por alguna función subyacente. Los valores en los puntos de datos son una serie de instantáneas de esa función en varios momentos. FDA no requiere que los datos sean necesariamente funciones de tiempo; sino que se puede aplicar

a otro tipo de elementos (por ejemplo, gráficos en el plano). También se puede suponer que los datos biomecánicos deben mostrar un cierto grado de suavidad, y muchas investigaciones se han dirigido hacia el desarrollo de técnicas que condicionan los datos originales para que muestren características lisas (véase el apartado 3.1 sobre el procesamiento de señales). Por último, también se asumió que los conjuntos de datos funcionales poseen una serie de derivadas que también son suaves. Ramsay y Silverman (2005) proporcionan una referencia exhaustiva a las principales preocupaciones y desarrollos teóricos en FDA durante las últimas décadas.

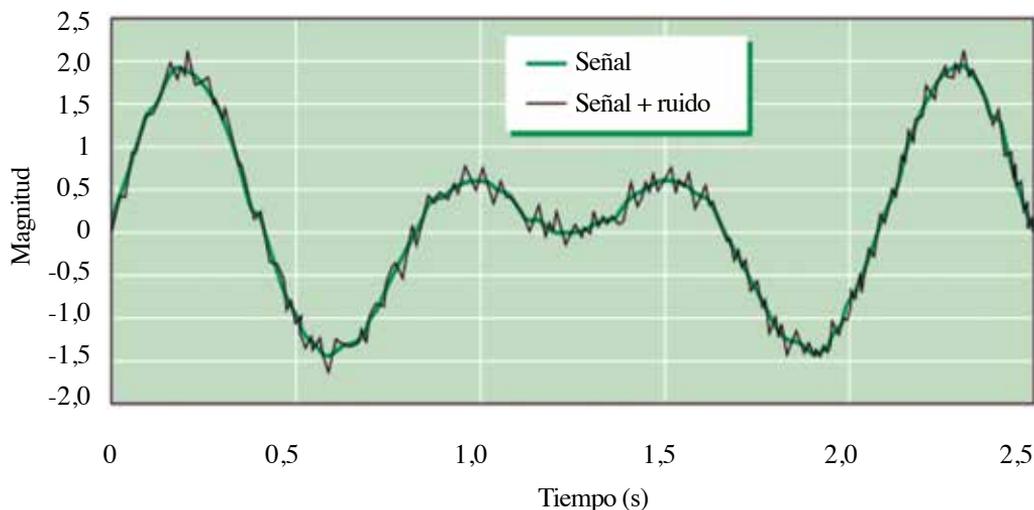
Los datos biomecánicos se obtienen observando generalmente por muestreo en tiempos discretos  $t_{ij}$ , donde  $i$  denota el  $i$ -ésimo sujeto;  $i = 1, \dots, n$  sujetos tomadas en la muestra de tamaño  $n$  y  $j = 1, \dots, n_i$ , donde  $n_i$  es el número de observaciones registradas del sujeto  $i$ . Sin embargo, los registros para diferentes sujetos en una muestra pueden tener diferentes longitudes y, debido a que las mediciones se pueden tomar en diferentes momentos para cada sujeto, el índice  $j$  se utiliza para indicar los momentos particulares en los que se midió un valor para un sujeto, dejando  $j$  de 1 a  $n_i$  como el número total de valores medidos puede ser diferente para cada uno de los  $i$  sujetos en la muestra. Para nuestros propósitos, se asume que  $n_i = n \forall i$ ; es decir, el número de observaciones tomadas para cada sujeto es el mismo.

A menudo los datos biomecánicos recopilados contendrán errores de medición o ruido; luego, estos se pueden representar como:

$$y_{ij} = \underset{\text{señal}}{x_i(t_{ij})} + \underset{\text{ruido}}{\varepsilon_{ij}} \quad (3.3)$$

donde  $y_{ij}$  representa los datos sin procesar o crudos para el sujeto  $i$ ,  $x_i(t)$ ; es una función que se estima, y  $j = 1, \dots, n$  puntos de observación de los datos, siendo  $\varepsilon_{ij}$  el error observacional aleatorio tal que  $E[\varepsilon_{ij}] = 0$ .

Figura 3.3. Señal con ruido y sin ruido



Nota. El gráfico representa los datos biomecánicos: una señal con ruido y una señal sin ruido o forma de onda.

Fuente: Robertson et al., 2014, p. 286

En la figura 3.3, se observa una señal con ruido (curva suavizada) y sin ruido (curva no suavizada).

Existen muchas técnicas de suavizado de datos para eliminar la influencia del ruido. Cada una tiene sus propias fortalezas y debilidades, y ninguna es mejor que otra. Lo más usual es realizar una representación de las curvas con bases de funciones y estimar los coeficientes básicos por mínimos cuadrados ordinarios (MCO).

Un conjunto de funciones conocidas e independientes  $\{\varphi_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  es una base de un espacio funcional E si cualquier función o dato funcional puede representarse por una combinación lineal finita, tal que cada curva muestral viene dada por:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^p c_{ij} \varphi_j(t), \quad (3.4)$$

donde  $c_{ij}$  son constantes a estimarse. Estos datos funcionales o curvas muestrales  $x_i(t)$  con  $i = 1, \dots, n$  se pueden suavizar mediante las bases funcionales más utilizadas como son *B-splines*, series de Fourier, *wavelets*, etc.

Si los datos biomecánicos son periódicos —es decir, que tienen forma de onda—, entonces es apropiado utilizar una base de Fourier para representarlos. Si son localmente lisos y no periódicos, se elige una base B-Splines. Y si son ruidosos —señales con ruido, las curvas tienen picos—, una base de *wavelet* puede ser apropiada. A continuación, se describen algunas de las técnicas de suavizado más típicas o básicas.

Un paso intermedio en FDA es el registro de datos para alinear las curvas en el tiempo de acuerdo a la localización de ciertas características o patrones de los datos biomecánicos *landmarks*, como máximos y mínimos, que ocurren en todos los registros, pero en distintos tiempos y no registrarlos podría confundir los resultados. De hecho, es muy usual que las curvas suavizadas sigan un patrón similar, pero que la posición en el tiempo de las características comunes sea diferente de un individuo a otro. Un estudio detallado de técnicas básicas de registros de datos funcionales puede verse en Ramsay y Silverman (2005).

### 3.1.1 Suavizado polinomial

Cualquier conjunto de  $n$  puntos de datos puede ser estimado por un polinomio de grado  $n-1$  de la forma:

$$x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots + a_{n-1}t^{n-1} \quad (3.5)$$

La mayoría de los movimientos humanos pueden describirse por polinomios del noveno grado o menos. Los polinomios producen un único conjunto de coeficientes que representan todo el conjunto de datos. El polinomio también tiene la ventaja de permitir interpolar puntos en diferentes intervalos de tiempo y hacer el cálculo de derivadas relativamente fácil.

### 3.1.2 Medias móviles

La técnica de medias móviles es un método no paramétrico, que se puede considerar para suavizar un dato biomecánico o curva dependiendo del número de datos que se va a seleccionar:

#### Suavizador de medias móviles simple

Sea  $k = 2q + 1$  un número impar; aplicarle una suavización  $k$  medias móviles a la serie  $\{x_t\}$  en el instante  $t$  consiste en transformar el valor  $x_t$  en la estimación.

$$\frac{x_{t-q} + \dots + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + \dots + x_{t+q}}{k}$$

#### Suavizador de medias móviles centrado

Dado  $k = 2q$  un número par, aplicarle una suavización  $2 \times k$  MA a la serie  $\{x_t\}$  en el instante  $t$  consiste en transformar el valor  $x_t$  en la estimación:

$$\frac{0,5x_{t-q} + x_{t-(q-1)} + \dots + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + \dots + x_{t+q-1} + 0,5x_{t+q}}{k}$$

Por ejemplo, una media móvil de tres puntos se logra reemplazando cada punto de datos ( $n$ ) por el promedio de  $n-1$ ,  $n$  y  $n+1$ . Una media móvil de cinco puntos utiliza los puntos de datos  $n-2$ ,  $n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$  y  $n+2$  y proporciona un resultado más suavizado que una media móvil de tres puntos. Debe tenerse en cuenta que habrá valores no definidos al principio y al final de la serie. Este método es extremadamente fácil de implementar, pero es incapaz de distinguir las señales del ruido ya que atenúa los componentes de señal válidos y puede no afectar a los componentes de ruido no válidos.

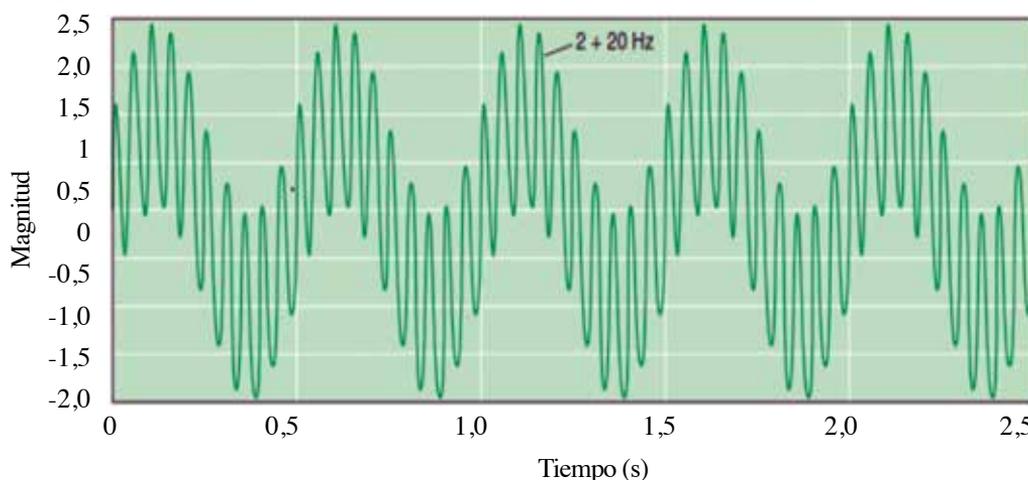
### 3.1.3 Transformada de Fourier

Véase la figura 3.4 y nótese que cualquier señal temporal (señal que varíe en el tiempo) puede representarse sumando las frecuencias individuales presentes en la señal (Winter, 1990).

«Las transformadas de Fourier y wavelet son utilizadas para extraer medidas basadas en energía y entropía en el dominio de tiempo-frecuencia» (Bedoya y Vargas, 2018).

Los sistemas de instrumentación y medida en el campo de la biomecánica del aparato locomotor, tales como sistemas optoelectrónicos, plataformas de fuerza, EMG, electrogoniometría, convertidores A/D en general, etc., introducen, en la medida de la magnitud física que se mide, una cantidad de ruido integrado por errores sistemáticos y aleatorios que corrompe la señal obtenida. Así, el procesamiento digital de señales se ha transformado en una herramienta imprescindible, puesto que permite la adquisición correcta de los datos (frecuencia de muestreo), la parametrización del fenómeno físico en cuestión, la mejora de la relación señal-ruido y la transformación de una señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia para facilitar su interpretación.

Figura 3.4. Suma de ondas senoidales de 2 Hz y 20 Hz en un periodo de 2,5 s



Nota. El gráfico representa ondas senoidales de 2 Hz y 20 Hz.

Fuente: Robertson et al., 2014, p. 280

En la figura 3.4, se representa la suma de ondas senoidales de 2 Hz y 20 Hz en un período de 2,5 s. El desfase o desplazamiento ( $a_0$ ) y el ángulo ( $\theta$ ) son cero para ambas ondas, y las amplitudes tienen valor 1.

Utilizando las funciones de seno y coseno, esta serie puede ser escrita como:

$$w(t) = a_0 + \sum b_n \text{sen}(2\pi f_n t) + c_n \text{cos}(2\pi f_n t) \quad (3.6)$$

Esto se conoce como serie de Fourier. Los coeficientes  $b_n$  y  $c_n$  se denominan «coeficientes de Fourier» que se pueden calcular utilizando las siguientes fórmulas:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt, \quad (3.7)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T w(t) \text{sen}(2\pi f_n t) dt, \quad (3.8)$$

$$c_n = \frac{2}{T} \int_0^T w(t) \text{cos}(2\pi f_n t) dt, \quad (3.9)$$

Los coeficientes de Fourier pueden calcularse a partir de valores igualmente espaciados en el tiempo con el uso del algoritmo de transformación discreta de Fourier (DFT, siglas en inglés *discrete Fourier transformation*). Dados los coeficientes de Fourier, se puede construir la señal original utilizando un algoritmo DFT inverso. El DFT es un algoritmo de cálculo recursivo. Las transformaciones rápidas de Fourier (FFT, siglas en inglés *fast Fourier transformation*) toman menos tiempo y se utilizan con mayor frecuencia. Una FFT requiere que el número de puntos de datos originales sea una potencia de 2.

La mayoría de los paquetes de *software* dan el resultado de una FFT en términos de una porción real y una porción imaginaria. Para una señal discreta real, la porción real corresponde al coeficiente del coseno y la porción imaginaria corresponde al coeficiente del seno de la ecuación de la serie de Fourier.

La transformada de Fourier discreta tiene la ventaja de que las frecuencias se pueden separar sin importar cuándo se produzcan en la señal. Incluso las frecuencias que ocurren al mismo tiempo pueden ser separadas y cuantificadas. Una

desventaja importante es que no se conoce cuándo están presentes esas frecuencias. Se puede superar esta dificultad separando la señal en secciones y aplicando el DFT a cada sección. Entonces se tendría una mejor idea de cuándo una frecuencia determinada ocurrió en la señal. Este proceso se denomina transformada de Fourier dependiente del tiempo.

El suavizado de Fourier consiste, de forma sucinta, en transformar los datos en el dominio de frecuencia, eliminando los coeficientes de frecuencia no deseados y, a continuación, realizar una transformación inversa para reconstruir los datos originales sin el ruido.

### 3.1.4 Splines

La denominación *spline* se debe al instrumento mecánico del mismo nombre que consiste de un alambre flexible que puede ser utilizado para dibujar curvas suaves a través de puntos asignados. Esta clase de instrumentos fueron utilizados para realizar dibujos técnicos en las industrias aeronáuticas, automotriz, naval, etc. La teoría de los *splines* fue desarrollada en la década de 1940 por el matemático estadounidense de origen rumano Schoenberg Isaac J., (1903-1990).

Una función *spline*, consiste en un número de polinomios de cierto orden que se unen de forma suave en un conjunto de nodos prefijados (De Boor, 2001). Los *splines* cúbicos (de tercer orden) y quinticos (de quinto orden) son los más utilizados para aplicaciones en biomecánica. Los *splines* son especialmente útiles si faltan datos en el flujo que necesitan interpolación. En muchos sistemas de captura de movimiento, los procedimientos de «llenado de huecos» se hacen ajustando *splines* a través de los espacios «vacíos» en trayectorias cuando, por ejemplo, dos o más cámaras no pudieron ver un marcador y, por lo tanto, la trayectoria tridimensional no pudo ser reconstruida. Para el análisis de datos funcionales biomecánicos es necesario conocer la forma explícita de estos; sin embargo, en la práctica real, se desconoce.

Dados

- $S(x)$  una función definida en  $[a, b]$ ,
- $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  conjunto de puntos ordenados.

Entonces se dice que  $S(x)$  es un *spline* de grado  $p$  y nodos  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  si satisface:

1. La función  $S(x)$  es un polinomio de grado menor o igual a  $p$  en cada intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ ;
2.  $S(x)$  tiene derivadas hasta de orden  $(p-1)$  continuas en  $[a, b]$

Ahora se particularizan estas funciones  $S$ , al caso de tercer grado por sus buenas propiedades: derivabilidad, suavidad y continuidad, denominados *splines* cúbicos. Cuando el *spline* pasa por los valores observados de la curva se llama «*spline* de interpolación».

Sean

- $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ,  $n+1$  puntos de un intervalo  $[a, b]$  denominados nodos,
- $f_0, f_1, \dots, f_n$  valores de una función evaluada en los nodos:  
 $f_i = f(x_i)$ , con  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Entonces el *spline* cúbico natural de interpolación de la función  $f$  se define como una función  $S(x)$  de dominio el intervalo  $[x_0, x_n]$  con las propiedades siguientes:

1. La función  $S(x)$  es un polinomio de orden tres en cada intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ .
2.  $S(x_i) = f_i$  en cada nodo  $x_i$ .
3. La segunda derivada  $S''(x)$  existe y es continua a lo largo del intervalo  $[x_0, x_n]$  y se denota por  $S \in C^2([x_0, x_n])$ .
4. En los nodos extremos se cumple  $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ .

La base más usual para representar a las funciones spline es la de los *B-splines* cúbicos.

**Nota.** Nótese que los *B-splines* son muy usados para suavizar los datos cinemáticos porque su estructura está diseñada para proporcionar una función suave con la capacidad de acomodar el comportamiento local cambiante. Eilers y Marx (1996) esbozaron las propiedades generales de una base de *B-splines*. Una vez que se conocen los nodos, es relativamente fácil calcular los *B-splines* usando el algoritmo recursivo de De Boor (1978).

### 3.2 ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS BIOMECÁNICOS

Para comenzar un estudio de datos biomecánicos con forma de onda, se presentarán medidas descriptivas.

En el contexto del FDA, los datos provienen de la observación de un proceso continuo  $\mathfrak{X} = \{X(t); t \in T\}$ . Si  $T \subseteq \mathbb{R}$ ; entonces, el dato funcional es una curva. Si  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  luego, el dato funcional es una imagen.

De acuerdo a la definición de Ferraty y Vieu (2006), una variable aleatoria  $\mathfrak{X}$  se llama funcional si toma valores en un espacio infinito dimensional de funciones. Una observación  $X$  de  $\mathfrak{X}$  se llama dato funcional.

Al trabajar con datos funcionales, el paso inicial es determinar el espacio funcional con su respectiva métrica que puede proporcionar información relevante acerca del comportamiento de los datos. En este caso, hay que centrarse en aquel en que los datos funcionales son curvas pertenecientes al espacio funcional de Hilbert  $L^2$ .

$$\text{Sea } T = [a, b] \subset \mathbb{R}; L^2 = \left\{ X: T \rightarrow \mathbb{R} \text{ t. q. } \int_T X^2(t) dt < \infty \right\}$$

#### Media funcional

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t) \quad (3.10)$$

### Varianza funcional

$$Var(x(t)) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t) - \bar{x}(t)]^2 \quad (3.11)$$

### Desviación estándar funcional

$$D.E(x(t)) = \sqrt{Var(x(t))} \quad (3.12)$$

### Covarianza

$$Cov(x(t_1), x(t_2)) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t_1) - \bar{x}(t_1)][x_i(t_2) - \bar{x}(t_2)] \quad (3.13)$$

### Correlación funcional

$$Corr(x(t_1), x(t_2)) = \frac{Cov(x(t_1), x(t_2))}{\sqrt{Var(x(t_1))Var(x(t_2))}} \quad (3.14)$$

### Correlación cruzada

$$Corr(x(t_1), y(t_2)) = \frac{Cov(x(t_1), y(t_2))}{\sqrt{Var(x(t_1))Var(y(t_2))}} \quad (3.15)$$

Se pueden utilizar librerías como *fda* o *fda.sc* del *software* libre R para reconstruir curvas muestrales aplicando datos biomecánicos y calcular sus medidas descriptivas.

### 3.3 ANÁLISIS EN COMPONENTES PRINCIPALES FUNCIONALES (FPCA)

En apartados anteriores fueron considerados los datos biomecánicos como «señales de forma de onda», que son señales con ruido de dimensión grande. Para el estudio de estos datos se aplica generalmente el ACP multivariante sobre los datos discretos observados.

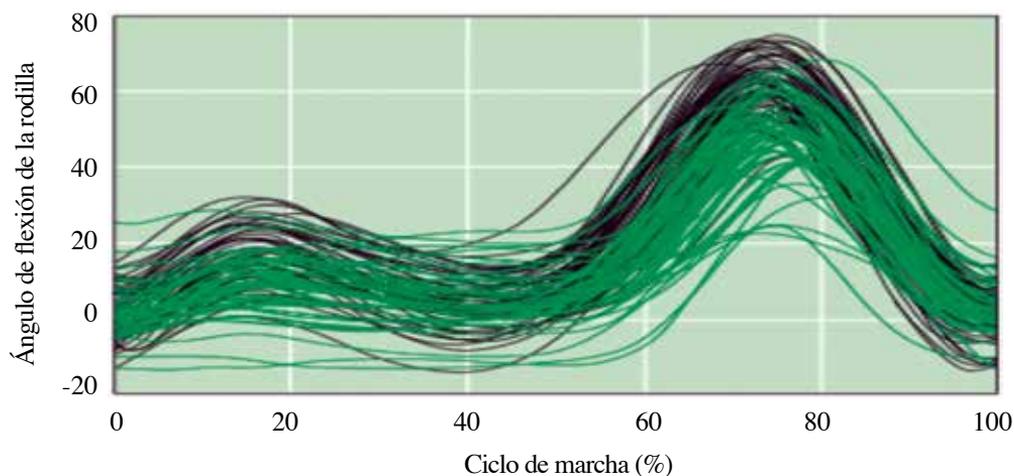
En este texto se presenta un enfoque poco visto en la investigación biomecánica, el ACP funcional, cuyo objetivo es reducir la dimensión infinita de las señales y detectar e interpretar las diferencias en la forma y amplitud de estos datos biomecánicos. Se utilizará también para evaluar estadísticamente las diferencias entre grupos o condiciones de estos datos biomecánicos.

La mayoría de los datos biomecánicos que caracterizan el movimiento humano aparecen como formas de onda temporales (señales con ruido descritas en el tiempo). Así, los datos de la figura 3.5 ilustran el ángulo de flexión de la rodilla medido para un ciclo de caminar completo de cincuenta sujetos con osteoartritis de rodilla y sesenta sujetos sin esta enfermedad. Estos datos biomecánicos tienen algunas características:

1. **Cantidad grande de datos.** En efecto, si se representa cada una de las formas de onda 110 (50+60, sujetos) de cada porcentaje del ciclo de caminar de 0 % a 100 %, (101 valores que actúan como variables), se tiene  $110 * 101 = 11\ 110$  datos. Por esta razón los datos se describen a menudo como multidimensionales.
2. **Repetición de forma de datos.** Existe un patrón subyacente de los datos biomecánicos «formas de onda  $\equiv$  señales con ruido» que generalmente estos siguen. Para una forma de onda dada en un valor específico, esta se repite.
3. **Presencia de gran variabilidad.** La variación está dentro de cada grupo y se relaciona con las diferencias en el movimiento de la articulación de la rodilla, variación entre sujetos (lo que se conoce como variación de sujeto a sujeto). Otra parte de la variación se debe a las diferencias en el movimiento de la articulación de la rodilla entre los dos grupos (la llamada variación entre grupos), y es esta variación la que normalmente nos interesa

porque se relaciona con un objetivo del análisis de datos biomecánicos: *detectar e interpretar las diferencias en los datos de forma de onda entre los grupos de interés.*

Figura 3.5. Ejemplo de ángulo de flexión



Nota. El gráfico representa los datos biomecánicos para cincuenta sujetos con osteoartritis avanzada de rodilla (OA) (líneas verdes) y cincuenta sujetos sin OA (líneas negras).

Fuente: Robertson et al., 2014, p. 318

Nota. El gráfico representa los datos biomecánicos para cincuenta sujetos con osteoartritis avanzada de rodilla (OA) (líneas verdes) y cincuenta sujetos sin OA (líneas negras).

Fuente: Robertson et al., 2014, p. 318

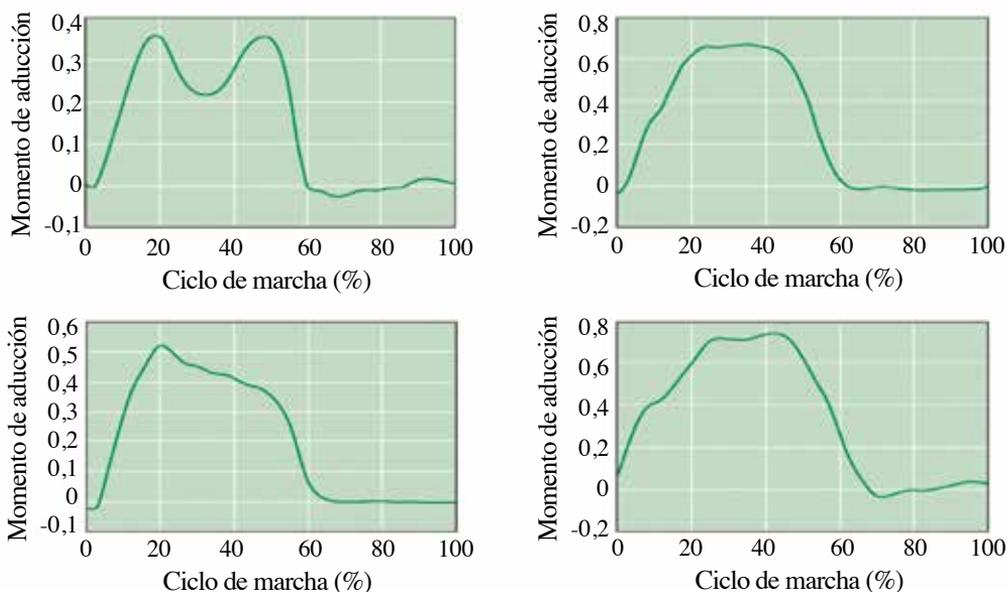
En la figura 3.5, fueron considerados datos de forma de onda del ángulo de flexión de la rodilla.

Se trata ahora de encontrar las características más relevantes y destacar las más importantes sin perder información fundamental. Tradicionalmente, esto se ha logrado mediante la extracción de parámetros discretos de los datos de forma de onda (por ejemplo, cálculo de valores máximos y/o mínimos), aunque esto da como resultado un reducido número de parámetros que se pueden comparar entre sujetos.

Se puede perder mucha información temporal de los datos en forma de onda. Estos enfoques tradicionales conducen también a reducciones severas de los datos y se descarta mucha información importante, lo que hace que estos sean insatisfactorios. Además, para parámetros discretos de estos datos biomecánicos, se han encontrado conclusiones inconsistentes en la literatura del tema. En algunos casos, los sujetos individuales pueden exhibir una descripción de forma de onda particular. Así, por ejemplo, si se consideran las cuatro diferentes formas de onda del momento de aducción de la rodilla, medido durante el ciclo de caminar presentada en la figura 3.6, comenzando con la forma de onda del momento de aducción de doble pico clásico que se representa comúnmente (fig. 3.6a). Las otras tres formas de onda son formas de onda atípicas sin picos definidos (fig. 3.6 b-d). A pesar de que estas formas de onda son atípicas, están presentes en varias poblaciones.

Aunque los valores de máximos y/o mínimos en una serie de tiempo pueden ser evidentes y cuantificados fácilmente, surge una inquietud: ¿cómo cuantificar dos formas de ondas complejas que varían en magnitud y forma?

Figura 3.6. Forma de onda del momento de aducción para cuatro sujetos



Nota. El gráfico representa los datos biomecánicos de forma de onda del momento de aducción para cuatro sujetos.

Fuente: Robertson et al., 2014, p. 319

En la figura 3.6, se representan datos de forma de onda, o simplemente datos biomecánicos del momento de aducción para cuatro sujetos: (a) forma de onda típica, (b) forma de onda sin picos definidos, (c) forma de onda sin segundo pico definido, (d) forma de onda sin primer pico definido.

El objetivo del presente apartado es describir el uso de las técnicas PCA y FPCA al observar la conjunción en el método denominado análisis de componentes principales funcionales que, en sus siglas en inglés, es FPCA (*functional principal component analysis*), herramienta estadística para identificar características esenciales de los datos biomecánicos, como por ejemplo, la posición angular durante el ciclo de caminar, también otras variables cinemáticas como: velocidad y aceleración, del movimiento humano durante el ciclo de caminar.

### 3.3.1 PCA Multivariante

El análisis de componentes principales multivariante (PCA) es una técnica de descomposición ortogonal, lo que significa que las componentes principales individuales resultantes son incorreladas entre sí. Matemáticamente, PCA es una transformación ortogonal que convierte un número de variables correlacionadas en un número menor de variables no correlacionadas, denominadas componentes principales y que cumplen la propiedad de maximizar la varianza de combinaciones lineales de los datos biomecánicos. El PCA es ideal para la reducción de datos y resumen de la información muestral. La interpretación se ha utilizado eficazmente en la investigación biomecánica para analizar datos de forma de onda temporal, incluyendo la posición del ciclo de caminar.

Cuando se aplica la técnica PCA del análisis multivariado mediante una combinación de señales ortonormales que cumplen con la propiedad de maximizar la varianza, se calculan y extraen un conjunto único de variables incorreladas (componentes principales) que explican la presencia de variabilidad en los datos de forma de onda. Los tres principales aspectos del PCA son:

1. Las componentes principales son incorreladas entre sí.
2. Solo algunas de las componentes principales son necesarias para representar adecuadamente la variabilidad de los datos de forma de onda original.

- Las representaciones de las componentes principales se pueden utilizar para detectar e interpretar diferencias entre señales de sujetos.

En el caso de tener un conjunto de señales temporales, se pueden representar los datos en forma matricial:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{np} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

donde cada fila representa un individuo, y cada columna representa los valores de la variable temporal en un instante particular para todos los  $n$  individuos. En la ecuación (3.16), se presentan  $p$  variables de observaciones temporales, es decir,  $p$  puntos de tiempo para cada uno de los  $n$  individuos. Por ejemplo, cada curva del ángulo de flexión de la rodilla de la figura 3.6 ocuparía una fila en la matriz, con cada columna representando un punto de tiempo de las formas de onda angulares. Para estos 110 individuos, cada uno con formas de onda muestreadas en 101 puntos de tiempo (0 %-100 % ciclo de marcha),  $n = 110$  y  $p = 101$ .

El interés ahora es el análisis de la variación de estos datos, en términos de cómo cambia la forma de onda con el tiempo y cómo un individuo varía respecto a otro. Una forma es mediante la matriz de varianzas-covarianzas de  $X$ , aquí denotada con  $S$ .

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{np} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

Los elementos diagonales,  $s_{ii}$  representan la varianza estimada en cada instante de la forma de onda, donde:

$$s_{ii} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)^2}{n - 1}, \quad (3.18)$$

donde  $i$  es la columna y  $n$  es el número de filas (individuos). Los elementos diagonales  $s_{ij}$  representan la covarianza entre cada par de instantes de tiempo de las señales temporales, es decir las variables,  $X_i$  y  $X_j$  ( $i$ -ésima fila y  $j$ -ésima columna).

$$s_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)}{n - 1} \quad (3.19)$$

Si las covarianzas son diferentes de cero, entonces hay cierta relación lineal entre las dos variables. La fuerza de esta relación puede ser representada por el coeficiente de correlación:

$$r_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}s_{jj}}} \quad (3.20)$$

La matriz de varianzas-covarianzas  $S$  contiene la estructura de variabilidad de los datos originales  $y$ , si los elementos distintos de la diagonal principal son diferentes de cero, entonces significa que las señales temporales están correlacionadas. Las componentes principales se extraen de esta matriz  $S$ . Hay que recordar que el conjunto de componentes principales que se busca no está correlacionado, lo que significa que se asociarán con una matriz de varianzas-covarianzas que sean todos los elementos de fuera de la diagonal principal iguales a cero. El proceso de transformación de la matriz de varianzas-covarianzas de datos originales  $S$  a la matriz de varianzas-covarianzas de las componentes principales  $D$  se conoce como diagonalización, o descomposición ortogonal de acuerdo al álgebra lineal, y se puede escribir como:

$$U'SU = D, \quad (3.21)$$

donde la matriz  $U$  se puede considerar como una matriz de transformación ortogonal que cambia a los datos originales en un nuevo sistema de coordenadas. Las nuevas coordenadas son las componentes principales y están alineadas con las direcciones de variación en los datos. Las columnas de  $U$  son los vectores propios de  $S$  y son a menudo llamados **vectores de carga (pesos) de componentes principales o simplemente PC de carga**.  $D$  es una matriz diagonal cuyos elementos,  $\lambda_i$ , son los valores propios de  $S$ , y cada valor propio es una medida de la variación

asociada a cada componente principal. El número de elementos de la diagonal no nulos de  $D$  es el número máximo de componentes principales. Este número es menor o igual al número de individuos  $n$ , o a la dimensión  $p$  de las señales, que corresponde al rango  $r$  de  $S$ . En nuestro ejemplo de las señales o datos biomecánicos (formas de onda) de ángulos de flexión de la rodilla, el rango de  $S = 101$ , por lo que el número máximo de componentes principales es 101. En la práctica solo se usa una pequeña fracción del número máximo de componentes principales. El último paso es utilizar la matriz  $U$  para transformar los datos originales de  $X$ , en las nuevas componentes principales no correlacionados ( $Z$ ), es decir:

$$\begin{matrix} Z \\ (n \times r) \end{matrix} = \begin{matrix} [X - \bar{X}] & U \\ (n \times p) & (p \times r) \end{matrix} \quad (3.22)$$

donde cada columna de la matriz  $Z$  es una componente principal y sus elementos se denominan puntuaciones de componentes principales o puntuaciones de PC.

Después del cálculo, las componentes principales se ordenan de acuerdo a la cantidad de varianza que cada una expone en los datos originales, por lo que la primera componente explica la cantidad máxima de varianza, la segunda tiene la varianza máxima sujeta a ser ortogonal a la primera, y así sucesivamente. La varianza de cada componente principal viene dada por los valores propios,  $\lambda_i$ , que son los elementos de la diagonal de la matriz  $D$ . El PCA es una transformación de preservación de la varianza de modo que la variación total en los datos originales es capturada por las componentes principales. La medida más comúnmente utilizada para la variación total de datos es la suma de las varianzas de cada variable, que es igual a la suma de los elementos de la diagonal de  $S$ . A la suma de los elementos diagonales de una matriz se conoce como traza ( $tr$ ) de una matriz, de modo que:

$$tr(S) = tr(D) \quad (3.23)$$

De esta manera se puede cuantificar la porción de la variación total explicada por cada componente principal,

$$\text{Variación explicada por: } PC_i = \frac{\lambda_i}{tr(S)} = \frac{\lambda_i}{\sum \lambda} \quad (3.24)$$

Para el caso de los datos de forma de onda de flexión de la rodilla (fig. 3.5), se ve que más del 90 % de la variación en los datos es capturado por las primeras 3 PC y casi el 99 % de la variación se explica por las primeras 5 PC. El desglose por PC se muestra en la tabla 3.1.

Tabla 3.1. Variaciones explicada y explicada acumulada

PC	Variación explicada (%)	Variación explicada acumulada (%)
PC1	61,5	61,5
PC2	19,9	81,4
PC3	12,5	93,9
PC4	2,8	96,7
PC5	2,0	98,7

Nota. En esta tabla de variaciones explicada y explicada acumulada.

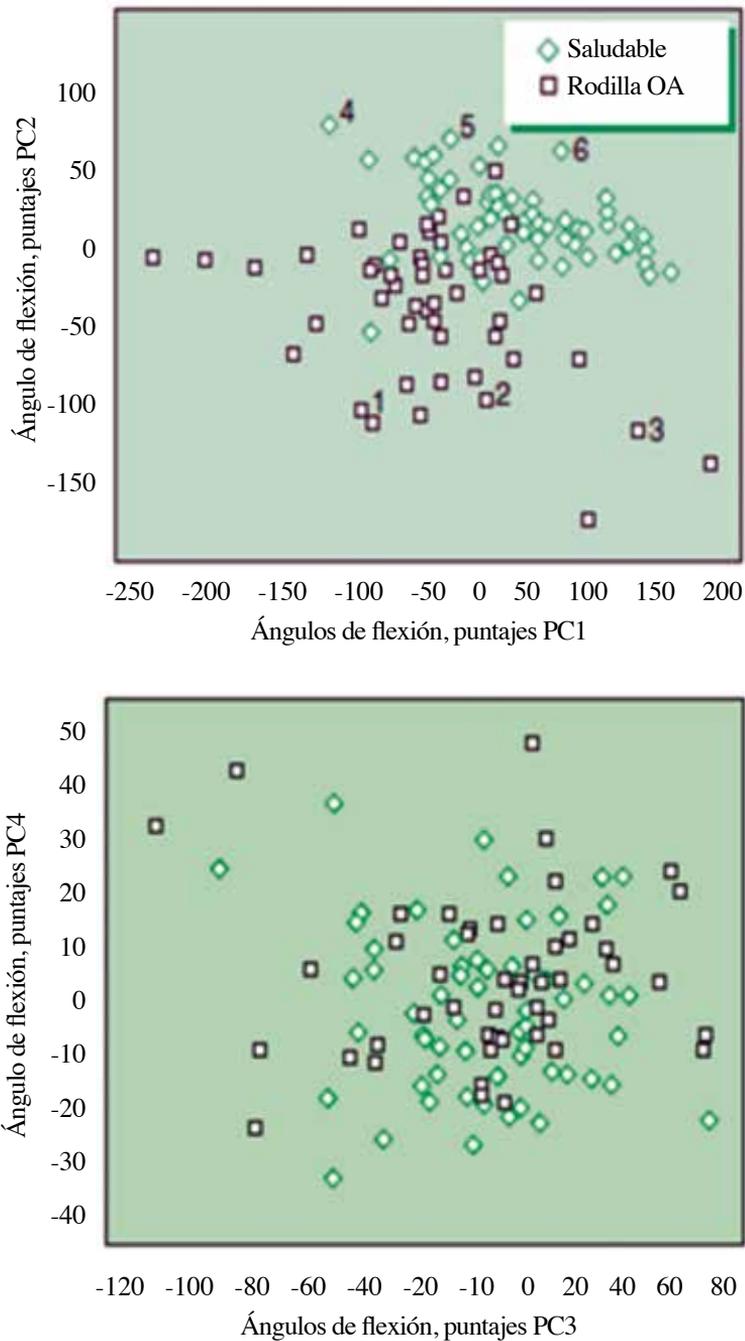
Fuente: Robertson et al., 2014, p. 329

En la tabla 3.1, se indican las variaciones explicada y explicada acumulada para cada componente principal, PC de datos biomecánicos del ángulo de flexión.

El siguiente paso es interpretar las componentes principales. El proceso de relacionar las componentes principales con las variables biomecánicas originales es importante porque, por lo general, interesa interpretar las diferentes componentes principales que se calcularon. En el caso de los datos biomecánicos del ángulo de flexión, se observa (fig. 3.7) que las dos primeras PC permiten separar los individuos enfermos (OA) de los no enfermos. Estas diferencias se pueden contrastar más objetivamente haciendo un test sobre las medias de las componentes principales en los dos grupos como puede verse en la figura 3.8. Los resultados evidencian claramente que la tercera y cuarta componentes principales se comportan igual en ambos grupos mientras que las diferencias significativas están en la primera y la segunda PC.

Pero ¿qué características de las curvas de ángulo de flexión de la rodilla están asociadas con estas dos componentes principales? Por lo tanto, nos gustaría identificar e interpretar la(s) característica(s) del ángulo de flexión de la rodilla que está asociado con estas componentes principales.

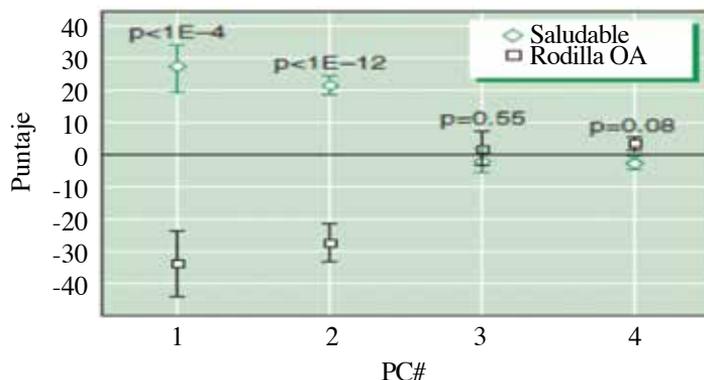
Figura 3.7. Puntuación de PC para sujetos con OA y los sujetos sin OA



Nota. Los gráficos representan valores de puntuación de PC para los sujetos con OA.  
Fuente: Robertson et al., 2014, p. 321

En la figura 3.7, se presentan los valores de puntuación de PC para los sujetos con OA (con dolor en la rodilla, cuadrados negros vacíos) y los sujetos sin OA (sin dolor en la rodilla, diamantes verdes vacíos). a) las puntuaciones PC1 versus PC2. b) PC3 versus PC4 puntuaciones.

Figura 3.8. Comparaciones de puntuaciones de componentes principales PC



Nota. El gráfico representa comparaciones de puntuaciones de PC.  
Fuente: Robertson et al., 2014, p. 322

Véase, en la figura 3.8, comparaciones de puntuaciones de PC. La media  $\pm$  SEM para los sujetos con OA (cuadrados negros vacíos) y los sujetos sin OA (diamantes verdes vacíos) se muestran para cada PC. La prueba t student no emparejada con una corrección de Holm-Sidak para comparaciones múltiples fue realizada para comparar la diferencia de los promedios para cada PC. Los valores p ajustados se dan por encima de cada comparación.

El método PCA extrae las características de la variación de los datos de forma de onda originales. Estas características se pueden interpretar basándose en el hecho de que cada componente principal está asociado con un cambio de forma particular en las formas de onda. La interpretación se logra examinando la forma del vector de carga y las formas de onda individuales correspondientes a los valores altos y bajos de la puntuación de las PC.

En la práctica, el número de componentes principales se suele seleccionar por orden de variabilidad de modo que la suma de las varianzas explicadas sea al

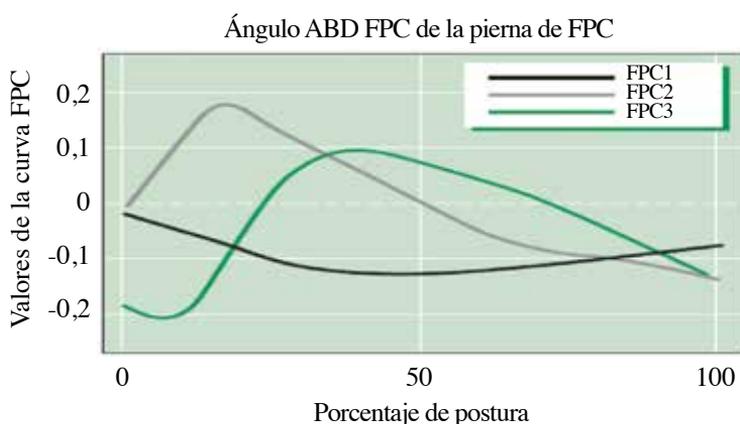
menos del 90 %. El scree plot es una ayuda gráfica muy interesante para hacer la selección. Finalmente, los datos originales pueden ser aproximados en términos de las componentes principales seleccionadas y sus cargas.

### 3.3.2 PCA Funcional, FPCA

El concepto clave del enfoque del análisis de datos funcionales (FDA) es que toda la secuencia de mediciones para un movimiento o condición se ve como una función o una sola entidad en lugar de una serie de puntos de datos individuales. El término análisis de datos funcionales fue introducido por Ramsay y Dalzell (1991).

El análisis de componentes principales funcionales (FPCA) es una extensión de la técnica multivariada clásica al dominio funcional. En este caso, se utilizan funciones propias en lugar de vectores propios para representar las componentes principales. Una ventaja importante de FPCA es que produce funciones principales que son definidas en el mismo dominio que las observaciones funcionales originales y, consecuentemente, las componentes principales funcionales (FPC)

Figura 3.9. Componentes principales funcionales de abducción-aducción para el movimiento de las piernas



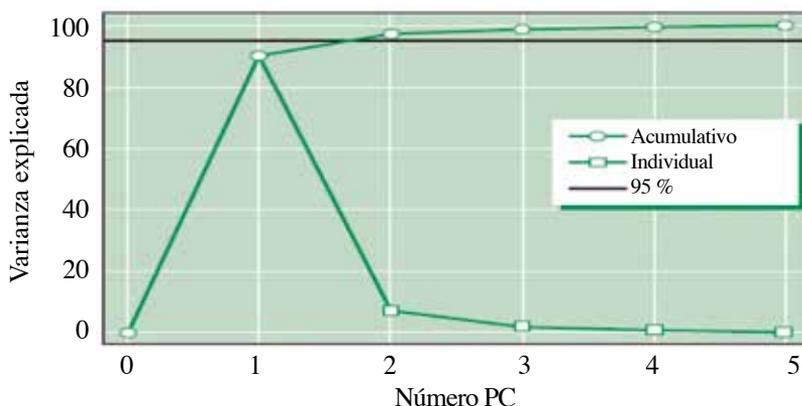
Nota. El gráfico representa componentes principales funcionales (funciones peso).  
Fuente: Robertson et al., 2014, p. 331

extraídas en el análisis tienen una definida interpretación biomecánica. La figura 3.9 muestra tres FPC (funciones peso o carga de las PCS) para el ángulo de abducción-aducción de las extremidades inferiores durante la fase de postura en marcha. Además, un múltiplo de cada FPC se puede agregar a (o restar de) la curva media global del grupo para demostrar las características precisas del movimiento de abducción-aducción de los sujetos que tienen una puntuación alta (o baja) en cada FPC.

En la figura 3.9 se observan las componentes principales funcionales de abducción-aducción para el movimiento de las extremidades inferiores (Coffey et al., 2008).

Al igual que en el PCA tradicional, cada FPC tendrá en cuenta una cierta proporción de varianza, y es necesario determinar cuántos FPC se requieren para completar un análisis significativo. Esto se puede lograr mediante la inspección de la gráfica Scree como se muestra en la figura 3.10. Esto muestra que, a medida que aumenta el número de PC, la cantidad de varianza contabilizada se aproximará al 100 % y cada FPCA que tenga éxito tendrá una menor y menor variación progresivamente.

Figura 3.10. Gráfico Scree de FPC



Nota. El gráfico Scree de FPC de componentes principales funcionales.

Fuente: Robertson et al., 2014, p. 331

En la figura 3.10, se presenta el gráfico Scree de FPC. En este ejemplo, está claro que las tres primeras FPC representan más del 95 % de la variación en la muestra.

Veamos ahora como se calculan numéricamente las FPC. El análisis de estas da como resultado funciones propias, y por lo tanto la  $r$ -ésima FPC, denotado como  $\xi_r(t)$ , se representa como una función que describe un patrón particular del comportamiento sobre el intervalo de tiempo considerado. Sea  $\bar{x}(t)$  la media del conjunto de datos funcionales y

$$v(s, t) = N^{-1} \sum_{i=1}^N [x_i(s) - \bar{x}(s)][x_i(t) - \bar{x}(t)] \quad (3.25)$$

denota la función de covarianza del conjunto de datos funcionales, donde  $s$  y  $t$  son puntos del tiempo. El cálculo de las FPC implica la descomposición ortogonal de la función de covarianza (en lugar de la matriz de covarianza como en la PCA multivariada) para determinar los modos dominantes de variación en los datos. Cada FPC se estima resolviendo

$$\int v(s, t) \xi_r(t) dt = \rho_r \xi_r(s), \quad (3.26)$$

donde  $\rho_r$  es un valor propio apropiado. La proporción de variación contabilizada por la  $r$ -ésima FPC es

$$\frac{\rho_r}{\sum \rho_r}. \quad (3.27)$$

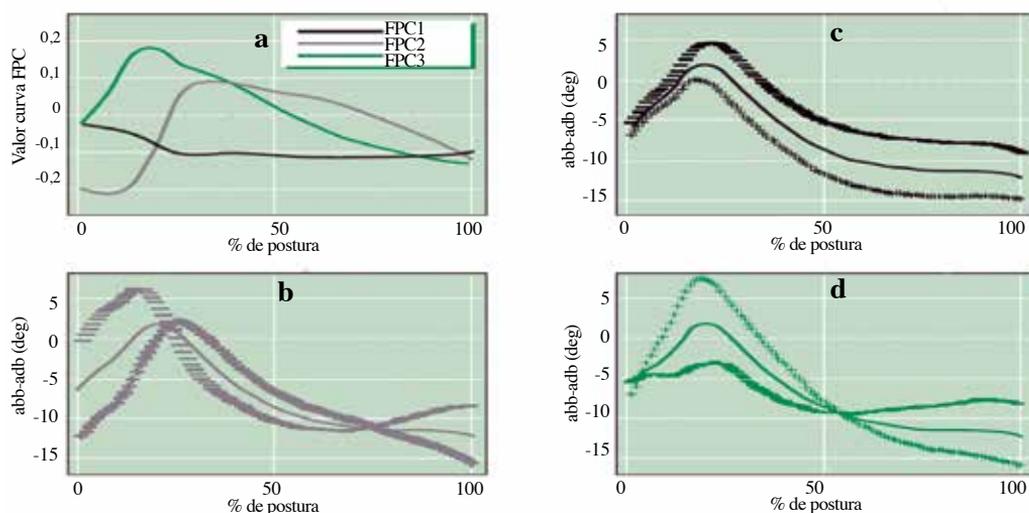
Para un análisis adicional, cada sujeto puede ser ponderado por cada uno de los FPC extraídos. De allí resultan escalares referidos como puntuaciones FPC. Es decir, para cada individuo  $i$  se calcula la puntuación de la  $r$ -ésima FPC como:

$$f_{ir} = \int \xi_r(t) [x_i(t) - \bar{x}(t)] dt. \quad (3.28)$$

Estas puntuaciones de FPC se pueden utilizar en el análisis estadístico adicional para determinar las tendencias del grupo.

Después de completar el análisis de componentes principales funcionales FPCA, el siguiente paso es presentar los resultados de manera que permitan una interpretación perspicaz. Ramsay y Silverman (2005) recomiendan el uso de gráficos que presenten la curva media del conjunto de los datos  $\bar{x}(t)$  originales, y la media  $\bar{x}(t)$ , y las funciones obtenidas sumando y restando un múltiplo adecuado de cada función FPC, por ejemplo,  $\bar{y}(t) \pm c \times \xi_1(t)$ . La figura 3.11 muestra esta forma de presentación para las tres primeras FPC de los conjuntos de datos de ángulo de abducción-aducción de la pierna. La figura 3.11a muestra las tres primeras FPC trazadas con respecto al porcentaje de posición. La 3.11b muestra que las puntuaciones altas de la primera componente funcional principal (FPC1), ilustrada por los signos más (+), se caracterizan por un ángulo de abducción-aducción de la pierna que están por debajo de la función media. Por el contrario, los bajos marcadores ilustrados por los signos menos (-) se caracterizan por un ángulo de abducción-aducción de la pierna que es más alta de la función media. La figura 3.11c muestra el efecto de FPC2 en relación con la función media con altos ángulos positivos tanto para los signos más como los menos. Por lo tanto, FPC2 describe los movimientos exactos de la abducción-aducción de la pierna asociados

Figura 3.11. Visualización de FPC



Nota. Los gráficos representan visualizaciones de componentes principales funcionales (FPCs). Fuente: Robertson et al., 2014, p. 319

al talón. La figura 3.11d muestra la FPC3 para el mismo conjunto de datos, y es claro que los altos puntajes positivos tienden a mostrar un mayor rango de movimiento de abducción-aducción de la pierna y los puntajes negativos tienden a mostrar un menor rango de movimiento de abducción-aducción de la pierna. Por lo tanto, FPC3 es representativa del rango de movimiento abducción-aducción de la pierna durante toda la fase de postura.

En la figura 3.11, se presentan cuatro visualizaciones de componentes principales funcionales (FPC). En el gráfico a, los primeros tres FPC se demuestran para el ángulo de abducción-aducción de la pierna en la fase de la postura en el funcionamiento. El efecto de puntuaciones altas (+) o bajas (-) para cada una de las tres FPC se muestran análogamente en los gráficos b, FPC1; c, FPC2, y d, FPC3.

## **CAPÍTULO IV.**

### **REVISIÓN DE PUBLICACIONES CON APLICACIONES DE FDA EN BIOMECÁNICA**

En este capítulo, se presenta una lista de resúmenes de publicaciones que toman en cuenta las principales técnicas de FDA, con aplicaciones en biomecánica: técnicas del análisis exploratorio, técnicas de suavización de curvas y FPCA, entre otras.

La técnica más utilizada para explicar la variabilidad de datos biomecánicos es, hasta el momento, FPCA que, como se ha comentado en el capítulo anterior, es una extensión de PCA multivariada en la que las componentes principales están representadas por funciones y no por vectores (Ramsay y Silverman, 2002).

A continuación, se presenta un resumen con los objetivos, métodos y principales resultados de las referencias seleccionadas.

#### **4.1 FUNCTIONAL DATA ANALYSIS OF KNEE JOINT KINEMATICS IN THE VERTICAL JUMP (ANÁLISIS DE DATOS FUNCIONALES EN LA CINEMÁTICA DE LA ARTICULACIÓN DE LA RODILLA EN EL SALTO VERTICAL)**

**Fuente: Ryan et al., 2006.**

La comprensión del proceso cinemático de la rodilla en el salto vertical requiere un desarrollo efectivo de los patrones de coordinación entre segmentos (muslo y pierna). El propósito de este trabajo es describirlos y cuantificarlos usando procedimientos del FDA. Para llevar a cabo el estudio, se obtuvieron datos biomecánicos de las extremidades inferiores (ángulos de articulación de la rodilla flexión-extensión) de cuarenta y nueve niños que realizaron el salto vertical. Los

niños fueron asignados por etapas de crecimiento utilizando los criterios de Gallahue y Ozmun. Los datos de coordinación de articulaciones entre segmentos consisten de parejas de datos (por ejemplo, tiempo-aceleración angular) los cuales se suavizaron utilizando técnicas estadísticas de suavización como B-splines y las funciones resultantes se analizaron utilizando FPCA. Los resultados del análisis proporcionaron una base para la aplicación de técnicas FDA en biomecánica.

En este estudio, los autores Harrison y Hayes realizan acertadamente la utilización de las técnicas del análisis de componentes principales funcionales, FPCA, como la suavización en general de curvas, entre otras y nos motiva a dar más importancia a los métodos matemáticos como base de los estudios para las aplicaciones en otras ciencias; en particular la que se está aplicando, la biomecánica. Este trabajo académico nos alienta a poner en práctica el dicho cubano «No sabe más el que dice o hace de lo ajeno, sino el que dice o hace de lo suyo».

#### **4.2 FUNCTIONAL DATA ANALYSIS OF RUNNING KINEMATICS IN CHRONIC ACHILLES TENDON INJURY (ANÁLISIS DE DATOS FUNCIONALES DE LA CINEMÁTICA DE LA MARCHA EN LA LESIÓN CRÓNICA DEL TENDÓN DE AQUILES)**

**Fuente: Donoghue et al., 2008.**

El análisis más común para las lesiones crónicas del tendón de Aquiles (AT) se basa en medidas discretas, que proporcionan un análisis parcial e incompleto debido a que muchos de los datos se descartan.

El FDA ve estos **datos biomecánicos** como una función (curvas o imágenes) y conserva así las características de esta. Por tal motivo, en este estudio se utiliza el FDA para examinar los mecanismos de la lesión crónica del AT y los efectos funcionales de la órtesis. Para el estudio, se tomaron en cuenta doce sujetos con lesión crónica del AT y doce controles (sujetos sin lesión crónica AT) que corrieron sobre una cinta. Los datos cinemáticos tridimensionales se obtuvieron utilizando sistemas de captura de movimiento *Qualisys* que funcionan a 200 Hz.

Los ángulos de dorsiflexión del tobillo (ADF); flexión de la rodilla (KF); eversión (EV), calcáneo y abducción de la pierna se calcularon a través de la pose o postura. Estos datos biomecánicos se representaron primero como funciones, y luego se aplicó la técnica de las componentes principales funcionales para describir los factores que explican la variación en los datos. Estas componentes se compararon en condiciones de AT, sujetos de control y sujetos con órtesis sin órtesis. Los resultados proporcionaron información adicional sobre los patrones de movimiento en comparación con los enfoques tradicionales e identificaron el período más relevante en la postura que aparece en las lesiones. El estudio mostró evidencia de que la variabilidad está relacionada con la presencia de lesiones en esta población clínica.

Se resalta en este artículo de Donoghue y colaboradores, publicado en el año 2008, la aplicabilidad de la técnica FDA en la lesión crónica del tendón de Aquiles (AT). A pesar de que los datos biomecánicos son complejos, los utilizan para describir patrones de movimiento y no solo consideran técnicas tradicionales de la estadística inferencial como la estimación y pruebas o contrastes de hipótesis. Se considera también que «mientras más enseñemos, más aprendemos».

### **4.3 APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DE DATOS FUNCIONALES A LA CARACTERIZACIÓN DE LA FUNCIÓN ARTICULAR DEL CUELLO (FDART)**

**Fuente: IBV, 2012**

Muchas patologías de cuello presentan síntomas que no se asocian a daños detectables de las vértebras o tejidos blandos. Por ello, es importante el uso de la prueba de valoración funcional, la cual analiza el movimiento del cuello para determinar en qué medida el patrón del movimiento se aparta del normal; sin embargo, esta técnica tiene limitantes: la fiabilidad de los resultados depende de la cooperación del paciente y los resultados de las pruebas no ofrecen información sobre el origen de la lesión, de manera que no hay una relación directa entre los resultados de las pruebas funcionales y los de las exploraciones que estudian los

daños en las estructuras corporales. Para solucionar esta problemática se cumple el siguiente objetivo.

Presentar un nuevo enfoque de las pruebas funcionales del cuello utilizando el FDA, el cual permite establecer un nexo de unión entre las técnicas de valoración funcional y las características de la función articular alteradas por las lesiones.

En este estudio, se utilizaron los **datos cinemáticos** de una muestra de cien individuos (treinta sanos, treinta patológicos, diez con síndrome de latigazo cervical y treinta simuladores). En ellos se aplicó un modelo basado en imágenes cinemáticas para obtener patrones articulares y establecer criterios de clasificación de pacientes a partir de sus características individuales. Se aplicó a la base de datos una versión funcional del coeficiente de correlación intraclase y se obtuvieron unos valores superiores a 0,9; lo que muestra la fiabilidad de la técnica. Mediante modelos en los que se utiliza la técnica del FPCA, se ha obtenido que cuatro factores engloban la mayor parte de variabilidad en el caso del patrón de las personas sanas. Posteriormente se aplicó un análisis de la varianza funcional *functional analysis of variance* (FANOVA) que permite observar las diferencias asociadas a la existencia o no de la enfermedad. Todo este estudio ha permitido sentar las bases para un nuevo enfoque en la valoración funcional de determinadas patologías de cuello.

Los investigadores del Instituto de Biomecánica de la Universidad de Valencia-España (IBV) fomentan la cultura de la investigación científica y es un ejemplo positivo para institutos, centros, grupos de investigación de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (Espoch), pues, nuestra *alma mater* debe seguir también los pasos de buscar ciencia que, proporcione la solución a los problemas de la sociedad ecuatoriana en todo campo, principalmente en los de la salud y lo económico. De hecho, «**la Espoch enseña lo que investiga**».

#### **4.4 APPLICATIONS OF FUNCTIONAL DATA ANALYSIS IN SPORT BIOMECHANICS (APLICACIONES DEL ANÁLISIS DE DATOS FUNCIONALES EN BIOMECÁNICA DEPORTIVA)**

**Fuente: Harrison, 2014**

Los métodos tradicionales del análisis de datos que se aplican en biomecánica a menudo se centran en sola una articulación; utilizando variables discretas como el desplazamiento de la posición durante el ciclo de caminar. Sin embargo, estos análisis son inadecuados al considerar la naturaleza compleja de la coordinación (de las articulaciones) humana.

El objetivo es analizar eficazmente la coordinación de las articulaciones. Es importante considerar los datos biomecánicos desde una perspectiva funcional y aplicar métodos tales como el FDA. El presente estudio aplica los cuatro pasos del FDA en datos de coordinación en biomecánica deportiva:

Paso 1: selecciona la base a los datos biomecánicos, es decir, deben estar representados por algún tipo de función. Típicamente, para los datos cinemáticos y cinéticos (que son no periódicos), *B-Splines* es apropiado.

Paso 2: consiste en normalizar los datos mediante el registro de marcadores (puntos de referencia).

Paso 3: aplica la técnica del FPCA que utiliza funciones propias en lugar de vectores propios.

Paso 4: se presentan los resultados del FPCA que permitan interpretaciones perspicaces.

Se recomienda utilizar gráficos que presenten la curva media de los datos originales junto con las funciones obtenidas del FPCA (agregando y restando un múltiplo adecuado de cada función del PCA). Se concluye que el FDA y el FPCA proporcionan fortalezas particulares en el estudio de la coordinación, ya que presentan un análisis en el mismo espacio y esto puede facilitar información más clara sobre los cambios y patrones de coordinación.

La publicación de Harrison (2014) sobre la biomecánica deportiva nos ayuda a manejar las técnicas FDA y FPCA con una metodología acertada en búsqueda de resultados más eficaces e interpretaciones perspicaces, tomando en cuenta el análisis exploratorio de datos y, con este, resaltar el aspecto gráfico y el resumen de datos con estadísticas descriptivas para llegar a concluir con técnicas inferenciales como estimación y prueba de hipótesis. «La estadística es una rama de las matemáticas que trata sobre la recopilación, representación, análisis e interpretación de un conjunto de datos para contribuir en la toma de decisiones acertadas y la obtención de conclusiones» (Congacha, 2012).

### **4.5 FUNCTIONAL DATA ANALYSIS OF AGING CURVES IN SPORTS (ANÁLISIS DE DATOS FUNCIONALES DE CURVAS DE ENVEJECIMIENTO EN DEPORTISTAS)**

**Fuente: Wakim y Jin, 2014.**

Es cierto que la condición atlética y física se ve afectada por la edad. Al trazar el rendimiento de un deportista contra su edad, se crea un gráfico llamado curva de envejecimiento del jugador. A pesar del gran interés para entrenadores y coordinadores del análisis de estas curvas de envejecimiento, hasta ahora, se han utilizado técnicas rudimentarias como, por ejemplo, análisis de regresión múltiple con *splines* interpolantes, que limitan el alcance de las conclusiones.

Este trabajo tiene como propósito realizar el estudio de las curvas de envejecimiento de deportistas mediante FDA y argumentar que el análisis de datos funcionales es más general y más flexible en comparación con los métodos que se han utilizado en la estadística multivariada. Primero, con los datos biomecánicos representados por las curvas de envejecimiento del jugador, se revisan las técnicas comunes del FDA y se describe y aplica sobre un método especializado llamado PACE, siglas en inglés que, en castellano, se traducen como «análisis de componentes principales a través de la esperanza condicional» y que es particularmente útil para el análisis deportivo. En segundo lugar, se destacan las ventajas del FDA en el deporte.

Finalmente, se adopta un enfoque de FDA mediante el análisis de datos para jugadores de la National Basketball Association (NBA) y Major League Baseball (MLB). En el análisis de los datos de MLB, se realizan pruebas de hipótesis funcionales para mostrar los resultados de las diferencias en las curvas de envejecimiento entre los potenciales bateadores y los potenciales no bateadores. También se ilustra una herramienta que nos permite discernir los principales modos de variación en el conjunto de curvas de envejecimiento de estos deportistas. Se muestra también que hay tres patrones distintos de envejecimiento en los jugadores de la NBA. Al observar a los basquetbolistas que caen en cada uno de los tres patrones, se nota que hay diferencias en la capacidad de puntuación. También se muestra que el patrón de envejecimiento es independiente de la posición. Esto demuestra cómo el FDA puede llevar a conclusiones que difieren de la opinión popular y los análisis que utilizan métodos más rudimentarios. Se concluye de este trabajo que el rendimiento de un jugador en realidad cambia continuamente con la edad.

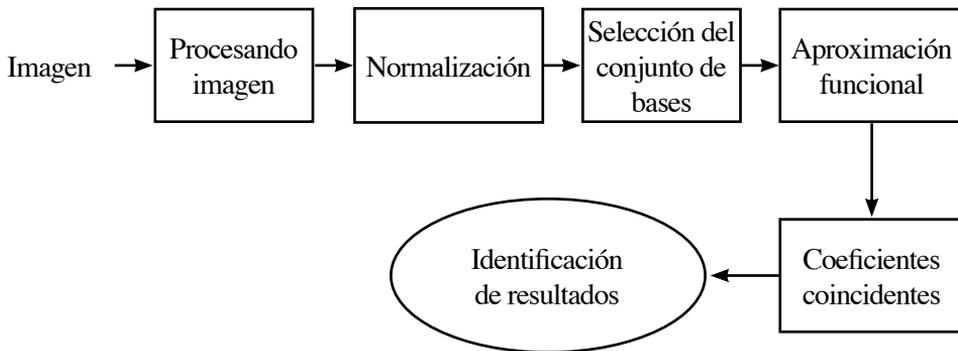
Wakim y Jin (2014), autores del artículo científico, «Análisis de datos funcionales de curvas de envejecimiento en deportistas» ponen en práctica, lo que se quiere transmitir a los estudiantes: «Aprender estadística no sirva para aprender estadística, sino para comprender los problemas de la gente», pues este trabajo ayuda muchísimo a entrenadores y coordinadores del deporte (Congacha, 2012).

#### **4.6 FUNCTIONAL DATA ANALYSIS AS AN ALTERNATIVE FOR THE AUTOMATIC BIOMETRIC IMAGE RECOGNITION: IRIS APPLICATION (ANÁLISIS DE DATOS FUNCIONALES COMO ALTERNATIVA PARA EL RECONOCIMIENTO AUTOMÁTICO DE IMÁGENES BIOMÉTRICAS: APLICACIÓN EN EL IRIS)**

**Fuente: Muñoz et al., 2014**

Un sistema para el reconocimiento automático de imágenes biométricas consta de varios componentes, que normalmente incluyen detección, seguimiento, extracción de patrones; representación de objetos y reducción de dimensionalidad. Una forma para esta representación puede ser el enfoque de análisis de

Figura 4.1. Diagrama general de FDA para la tarea de reconocimiento de imágenes



Nota. Diagrama general de FDA para la tarea de reconocimiento de imágenes.  
Fuente: Ortega y Congacha, 2001

datos funcionales (FDA). El iris del ojo humano es el único órgano interno verdaderamente visible desde el exterior. El procesamiento automático de su imagen contiene los pasos esenciales. Esto incluye soluciones innovadoras para su detección y segmentación. El diagrama de la figura 4.1 muestra los pasos necesarios para realizar una tarea de reconocimiento de imágenes basada en el análisis de datos funcionales. Se sabe que las imágenes digitales pueden ser representadas por funciones.

Este trabajo propone explicar en detalle una metodología para representar imágenes utilizando el FDA y cómo se puede realizar un análisis adicional con este enfoque, utilizando las imágenes del iris que tienen un aspecto geométrico circular que, junto con su aparente simetría rotacional, sugieren una expansión de base funcional en un dominio circular, técnica que se conoce como polinomios circulares de Zernike en investigación oftalmológica. Se trata de funciones base para la representación del iris (parecidas a los *B-splines*) que proporcionan resultados novedosos para la representación de imágenes, ya que su naturaleza continua se conserva. Representar usando datos funcionales proporciona muchas ventajas. Una de las más significativas es la reducción apreciable de la dimensión de los datos. Aunque el trabajo se centra principalmente en imágenes de iris, la metodología propuesta podría aplicarse para resolver problemas de reconocimiento en otros dominios.

El investigador cubano Muñoz y sus colegas, a través de este trabajo científico, nos enseñan a ser didácticos en temas de compleja explicación. Los autores exponen, en su diagrama general del FDA, el análisis de datos funcionales para el reconocimiento automático de imágenes biométricas y aplicación en el iris del ojo. Se reconece lo que indica el pensador chino Confucio: «Lo que oigo olvido, lo que veo recuerdo y lo que hago aprendo».

#### 4.7 ANÁLISIS MULTIVARIADO DE DATOS FUNCIONALES APLICADO A CURVAS DE ENCEFALOGRAMAS

**Fuente: Ríos et al., 2017**

Al estudiar las señales emitidas por la actividad cerebral, el análisis de datos en neurociencias suele ser complejo debido al gran volumen de información. A pesar de que el registro tiene características discretas, en realidad son funciones de onda por su naturaleza continua dado que dependen del tiempo. Los desarrollos tecnológicos han hecho posible que los investigadores de muchas áreas, entre ellas biomecánica, dispongan de grandes volúmenes de información para un mismo individuo. Usualmente, estos datos pueden ser representados a través de curvas o, en general, de funciones. De ahí surge un nuevo campo de estudio en estadística denominado análisis de datos funcionales (FDA). En FDA, la unidad básica de información es la función completa más que un conjunto de valores. Los métodos estadísticos usuales han sido adaptados a cada situación. En particular, se ha desarrollado el análisis de conglomerados funcionales por el método de k-medias donde la actividad cerebral responde a una función de onda de la carga eléctrica de las neuronas sobre el tiempo. Surge entonces la oportunidad de aplicar el FDA a este tipo de registros.

El objetivo de este trabajo es describir la aplicabilidad del análisis de conglomerados funcionales por el método de k-medias para clasificar la actividad cerebral en ratas *Norvegicus wistar*. Para ello se realizó la conversión de datos cinemáticos registrados en funciones de onda, usando bases de Fourier. El análisis se realizó mediante el *software* R utilizando las librerías, *fda* y *fda.usc*. Se proce-

saron los datos obtenidos en el electroencefalograma (EEG), convirtiéndolos en funciones por medio de bases de Fourier hasta obtener conglomerados que hacen una categorización no supervisada consistente, especialmente respecto a los atributos de frecuencia y regularidad de las ondas. Por lo tanto, el trabajo ofrece una alternativa a las técnicas actuales de procesamiento de señales; se abre una línea de investigación donde se toma la señal como una función y no una serie de puntos. En trabajos futuros, se pretende evaluar otros algoritmos de clasificación para datos funcionales y, de esta manera, evaluar la eficiencia computacional de los mismos en el contexto de minería de datos, además de evaluar su potencial aplicación en la clasificación automática de señales.

Con la exposición de Ríos et al. (2017) en su trabajo científico «Análisis multivariado de datos funcionales aplicado a curvas de encefalogramas», «adquiramos conocimientos de técnicas estadísticas mediante la experiencia a través de los problemas del diario vivir» (Congacha, 2012), como es la cisticercosis adquirida por ingerir cerdo hornado infectado de la llamada también triquina y observar las curvas de los encefalogramas donde la actividad cerebral es muy compleja, pero, con estas curvas, se comprendía el resultado que indicaba el especialista en neurocirugía.

***4.8 CONSIDERATIONS FOR THE USE OF FUNCTIONAL  
PRINCIPAL COMPONENTS ANALYSIS IN SPORTS  
BIOMECHANICS: EXAMPLES FROM ON-WATER ROWING  
(CONSIDERACIONES PARA EL USO DEL ANÁLISIS FUNCIONAL  
DE COMPONENTES PRINCIPALES EN BIOMECÁNICA  
DEPORTIVA: EJEMPLOS DEL REMO EN EL AGUA)***

**Fuente: Warmenhoven et al., 2019**

La proliferación de nueva tecnología biomecánica en laboratorio y en el campo facilita la captura de datos definidos en entornos continuos como el tiempo, también denominadas series temporales. Se requiere una comprensión de los enfoques estadísticos apropiados para analizar e interpretar estos datos y las técnicas

estadísticas del análisis de datos funcionales (FDA) han surgido en la literatura biomecánica.

El fin es abordar cuestiones prácticas que apliquen técnicas de FDA en biomecánica. Este trabajo recopila **datos** cinemáticos de una muestra de una base de datos de remo en el agua, y utiliza el **método** del análisis de componentes principales funcionales (FPCA), cuyos **resultados** han ayudado a la normalización temporal de datos, la eliminación de formas no deseadas de variación en un conjunto de datos y métodos documentados para preservar las propiedades temporales originales dentro de un conjunto de curvas. También se describen las limitaciones y fortalezas de dicha técnica y se proporcionan recomendaciones para alentar el uso apropiado de FPCA dentro del campo de la biomecánica deportiva aplicada.

Los autores del trabajo científico «Consideraciones para el uso del análisis funcional de componentes principales en biomecánica deportiva: ejemplos del remo en el agua» (Warmenhoven et al., 2019), que publicaron en el año 2019, nos hacen ver que la estadística es una herramienta fundamental de la investigación y se dice que «*la ESPOCH enseña lo que investiga*» (Congacha, 2016).

## CONCLUSIONES

Las aplicaciones del FDA en biomecánica son relativamente nuevas y, de hecho, existen pocas publicaciones científicas en esta área. Por lo tanto, es un campo de investigación que se debe motivar para futuros estudios y dar posibles soluciones o mejores evaluaciones a las personas que se están recuperando en la rehabilitación física de las extremidades en general, y a las personas con discapacidades motrices, principalmente de las extremidades inferiores y superiores.

En este texto, se muestra una iniciación a la investigación en el área del FDA tomando en cuenta datos biomecánicos del movimiento humano, específicamente de las articulaciones de las extremidades inferiores: pelvis, rodilla y tobillo de las que se pueden medir ángulos articulares como: abducción-deducción (cadera); flexión-extensión (rodilla) y rotación axial (tobillo).

Con la técnica FPCA, se pueden explorar y describir los datos funcionales biomecánicos que aparecen en cinemática tanto en 2-D como 3-D y, en cada tipo, se describen en las formas lineal y angular las variables cinemáticas como desplazamiento, velocidad y aceleración articulares (la posición durante el ciclo caminar angular y sus derivadas velocidad angular y aceleración angular).

En particular, se describe la aplicación de la metodología FCPA, siglas en inglés que, en castellano, se traducen como «análisis de componentes principales funcionales». Esta técnica estadística ayuda a seleccionar la mejor combinación de variables que identifiquen características relevantes del movimiento de las articulaciones de las extremidades inferiores del hombre/mujer y que reduzcan la dimensión del espacio de los datos biomecánicos (ángulos articulares). Antes se describen las técnicas principales de suavización de curvas y el análisis exploratorio.

## GLOSARIO

A continuación, se presentan las definiciones y términos importantes que se utilizan en los apartados de cinemática y/o biomecánica para comprender mejor este texto.

**Electromiografía (EMG):** prueba de diagnóstico para analizar la salud de los músculos y las células nerviosas (neuronas) que los controlan mediante el análisis de la actividad eléctrica en los músculos. La EMG puede ser monitoreada a través de electrodos insertados dentro de los músculos (electrodos intramusculares) o a través de electrodos en la superficie de la piel sobre el músculo.

**Cinética:** estudia los sistemas estáticos y/o en movimiento mediante el empleo de los conceptos de fuerza, potencia, energía, longitud, tiempo y masa.

**Cinemática:** parte de la física centrada en el análisis del movimiento dejando de lado el estudio de las fuerzas que la originan.

**Movimiento:** se refiere al desplazamiento de un objeto a través del espacio. La velocidad y la aceleración son componentes importantes del mismo.

**Equilibrio:** se refiere a la estabilidad. Un principio importante del equilibrio es la alineación del centro de gravedad del cuerpo sobre la base de apoyo. Tener un buen equilibrio es importante para la práctica de muchos deportes y ejercicios, así como tener también una buena posición durante el ciclo de caminar. En el lenguaje médico, existen términos para describir muchas situaciones como medial-lateral, diestro o zurdo, etc., donde **medial** denota proximidad y **lateral** significa opuesto, ambos respecto al plano sagital. Para las extremidades, se emplean los términos **proximal**, que significa cercano a la inserción de la extremidad en el tronco, y **distal**, que denota lo opuesto. Finalmente, los términos **superficial** y **profundo** denotan respectivamente cercano o lejano de la superficie corporal.

En biomecánica, se considera que cualquier movimiento parte de una posición anatómica.

**Posición anatómica:** aquella en la que una persona está situada de pie, con la vista hacia delante, los brazos a los laterales del cuerpo con las palmas hacia el frente, con los pies ligeramente separados en la zona de los talones y los dedos de los pies señalando hacia delante. Existen tres planos anatómicos o cardinales en la posición anatómica: plano **sagital o mediano**, que divide el cuerpo en dos lados (derecho e izquierdo), con algunas excepciones. Los movimientos de flexión (reducción del ángulo de una articulación o doblar la articulación) y de extensión (aumentar el ángulo de la articulación o extender la articulación) se producen en el plano sagital.

La segunda división del cuerpo se realiza a través del plano **frontal o coronal**, que distingue la parte delantera y la parte trasera del cuerpo. Una vez más, hay algunas excepciones: los movimientos de abducción (separar una extremidad de la línea central del cuerpo) y de aducción (acercar una extremidad a la línea central del cuerpo) se producen en el plano frontal. Finalmente, el plano **transversal u horizontal** divide el cuerpo en una parte superior y una parte inferior. Los movimientos de rotación se producen en el plano transversal. Los patrones diagonales de movimiento se producen cuando los componentes de estos tres planos cardinales de movimiento se combinan al mismo tiempo.

Los **ejes** son líneas rectas que atraviesan el cuerpo a modo de flechas, perpendiculares recíprocamente. Mientras que los planos cardinales se utilizan para describir las zonas espaciales en las que se mueve el cuerpo, los ejes describen los principales puntos pivotantes o de rotación de su movimiento. Los tres ejes principales son:

**Transversal:** que va de la izquierda a la derecha en la zona de la cintura.

**Longitudinal:** que atraviesa directamente el centro del cuerpo desde la cabeza hasta los pies.

**Medial:** une diagonalmente las caderas y los hombros.

Los siguientes términos se utilizan para describir movimientos específicos del cuerpo que se producen en los planos (cardinales) y a lo largo de los ejes. Algunos de ellos se han incluido en el lenguaje cotidiano, por lo que conviene familiarizarse con ellos, para ir desarrollando el texto.

Otra definición importante que se debe interiorizar para comprender cómo se mueve el cuerpo humano es el de **articulación**.

Existen dos tipos de articulaciones en el organismo. Las que proporcionan una mayor amplitud al movimiento y que, por tanto, son fundamentales a la hora de entender cómo se mueve el cuerpo, son **articulaciones sinoviales**, partes del cuerpo en las que el hueso se separa del cartílago a través de un líquido lubricante. Las articulaciones se caracterizan por su amplitud de movimiento relativamente grande.

**Músculo esquelético:** tipo de músculo estriado unido al esqueleto, que está formado por células o fibras alargadas y polinucleadas que sitúan sus núcleos en la periferia.

**Fotogrametría:** técnica para obtener mapas y planos de grandes extensiones de terreno por medio de la fotografía aérea.

**Transductor:** dispositivo capaz de transformar o convertir una determinada manifestación de energía de entrada, en otra diferente a la salida.

**Desplazamiento:** se define como el cambio de posición.

**Velocidad:** es la derivada del desplazamiento en el tiempo, o la tasa de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo.

**Aceleración:** es la derivada de la velocidad, o la tasa de cambio de velocidad con respecto al tiempo. Además, la aceleración es la segunda derivada del desplazamiento con respecto al tiempo. Estos tres datos biomecánicos se pueden utilizar para entender las características del movimiento humano y para comparar el movimiento de dos individuos diferentes.

## BIBLIOGRAFÍA

- Bedoya, E., Osorio, I., Tovar, C., Roqueme, K. y Espinoza, E. (2018). Determinación de la carga física como factor de riesgo de desórdenes osteomusculares. *ESPACIOS*, 39(06), 10-23.
- Benalcázar, H. (2007). *Análisis numérico*.
- Cappozzo, A., Catani, F., Della Croce, U. y Leardini, A. (1995). «Position and orientation in space of bones during movement: anatomical frame definition and determination». *Clin Biomech (Bristol, Avon)* 10 (4), 171-178.
- Celadores Online de Instituciones Sanitarias. (2022). Tema 8. Ejes y planos del cuerpo humano. *Celadores Online*. <http://celadoresonline.blogspot.com/p/tema-8.html>.
- Coffey, S. M., Cook, K., Tartaglia, N., Tassone, F., Nguyen, D. V., Pan, R., Bronsky, H. E., Yuhas, J., Borodyanskaya, M., Grigsby, J., Doerflinger, M., Hagerman, P. J. y Hagerman, R. J. (2008). Expanded clinical phenotype of women with the FMR1 premutation. *American Journal of Medical Genetics, Part A*, 146(8), 1009–1016. <https://doi.org/10.1002/ajmg.a.32060>
- Cole, J. E., Rind, D., & G.Fairbanks, R. (1993). Isotopic responses to interannual climate variability simulated by an atmospheric general circulation model. *Quaternary Science Reviews*, 12(6), 387–406. [https://doi.org/10.1016/S0277-3791\(05\)80004-6](https://doi.org/10.1016/S0277-3791(05)80004-6)
- Congacha, J. (2012). *Estadística aplicada a la educación con actividades de aprendizaje*. Editorial Académica Española.
- Congacha, J. (2016). *Estadística aplicada a la educación con actividades de aprendizaje*, 2.<sup>a</sup> ed. La Caracola.
- Díaz, C., Torres, A., Ramírez, J., García, L., & Álvarez, N. (2006). Descripción de un dispositivo destinado al análisis de la marcha en dos dimensiones. *Scielo*, 5. [http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1794-12372006000100007](http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1794-12372006000100007)

- Donoghue, O. A., Harrison, A. J., Coffey, N., y Hayes, K. (2008). «Functional data analysis of running kinematics in chronic achilles tendon injury». *Medicine & Science in Sports & Exercise* 40 (7), 1323-1335.
- Eilers, P. H. C., & Marx, B. D. (1996). Flexible smoothing with B-splines and penalties. *Statistical Science*, 11(2), 89–102. <https://doi.org/10.1214/ss/1038425655>
- Ferraty, F. . y Vieu, P. (2010). Nonparametric Functional Data Analysis Theory and Practice. *Scientific Research Publishing*, 11(1). [https://www.scirp.org/\(S\(czeh2tfqw2orz553k1w0r45\)\)/reference/referencespapers.aspx?referenceid=2921128](https://www.scirp.org/(S(czeh2tfqw2orz553k1w0r45))/reference/referencespapers.aspx?referenceid=2921128)
- Fisioactiva. (2019). Biomecánica. *Fisioactiva*. <https://fisioactiva.com/biomecanica/>.
- Grood, E.S. y Suntay, W.J. (1983). «A joint coordinate system for the clinical description of three-dimensional motions: application to the knee». *J. Biomech. Eng.* 105 (2), 136-144.
- Gruen, A. (1997). «Fundamentals of videogrammetry - A review». *Human Movement Science* 16 (2-3), 155-187.
- Harrison, A. (2014). *Applications of functional data analysis in sport biomechanics | ISBS - Conference Proceedings Archive*. Uni Konstanz. <https://ojs.ub.uni-konstanz.de/cpa/article/view/5905>
- Herda, T. J., Cramer, J. T., Ryan, E. D., Mchugh, M. P., & Stout, J. R. (2008). Acute effects of static versus dynamic stretching on isometric peak torque, electromyography, and mechanomyography of the biceps femoris muscle. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 22(3), 809–817. <https://doi.org/10.1519/JSC.0b013e31816a82ec>
- Horváth, L., y Kokoszka, P. (2012). *Inference for Functional Data with Applications*. Springer-Verlag.
- Instituto de Biomecánica de Valencia (IBV). (2012). *Aplicación del análisis de datos funcionales a la caracterización de la función articular del cuello (FDART)*. [https://gestion.ibv.org/gestoribv/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=37-fdart-2012&category\\_slug=productos&Itemid=128](https://gestion.ibv.org/gestoribv/index.php?option=com_docman&view=download&alias=37-fdart-2012&category_slug=productos&Itemid=128)
- Lu, T. W., y O'Connor, J. J. (1999). «Bone position estimation from skin marker co-ordinates using global optimisation with joint constraints». *Journal of Biomechanics* 32 (2), 129-134.

- Muñoz, D. P., Mata, F. J. S., Hernández, N. y Bustamante, I. T. (2014). «Functional data analysis as an alternative for the automatic biometric image recognition: Iris application». *Computacion y Sistemas* 18 (1), 111-121.
- Ortega, M. y Congacha, J. (2001). *Introducción a la Estadística y teoría de las probabilidades*. Espoch.
- Ramsay, J., y Silverman, B. W. (2002). *Applied functional data analysis : methods and case studies*. Springer-Verlag.
- Ramsay J. y Silverman B. W. (2005 [1997]). *Functional Data Analysis*, 2.ª ed. Springer-Verlag.
- Ríos, W. P., Carrillo Ramírez, A., y Garatejo Escobar, O. (2017). «Análisis de datos funcionales aplicado en electroencefalogramas: agrupamiento por k-medias funcional». *Comunicaciones en estadística* 10 (1), 129.
- R., J., y de Boor, C. (1980). *A Practical Guide to Splines. Mathematics of Computation*, 34(149), 325. <https://doi.org/10.2307/2006241>
- Robertson, D. G. E., Caldwell, G. E., Hamill, J., Kamen, G., y Whittlesey, S. N. (2014). *Research methods in biomechanics*. Human Kinetics.
- Ryan, W., Harrison, A. y Hayes, K. (2006). Functional data analysis of knee joint kinematics in the vertical jump. *Sports Biomechanics*, 5(1), 121–138. <https://doi.org/10.1080/14763141.2006.9628228>
- Spoor, C. W., y Veldpaus, F. E. (1980). «Rigid body motion calculated from spatial co-ordinates of markers». *Journal of Biomechanics* 13 (4), 391-393.
- Valderrama M.J., Aguilera A.M. y Ocaña F.A. (2000). *Predicción dinámica mediante análisis de datos funcionales*. La Muralla.
- Wakim, A., y Jin, J. (2014). «Functional data analysis of aging curves in sports». *ArXiv*, 1403.7548. <https://arxiv.org/abs/1403.7548>.
- Warmenhoven, J., Cobley, S., Draper, C., Harrison, A., Bargary, N., y Smith, R. (2019). «Considerations for the use of functional principal components analysis in sports biomechanics: examples from on-water rowing». *Sports Biomechanics* 18, 317-341.

- Winter, J. (1990). *La Biomecánica: Concepto integral y su contexto practico*. <https://g-se.com/jose-a-acero-jauregui-bp-j57cfb26f0f7ae>
- Woltring, H. J. (1985). 3-D attitude representation of human joints: A standardization proposal. *Journal of Biomechanics*, 27(12), 1399–1414. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(94\)90191-0](https://doi.org/10.1016/0021-9290(94)90191-0)
- Woltring, H. J. (1991). Representation and calculation of 3-D joint movement. *Human Movement Science*, 10(5), 603–616. [https://doi.org/10.1016/0167-9457\(91\)90048-3](https://doi.org/10.1016/0167-9457(91)90048-3)

Introducción al análisis de datos funcionales. Aplicación en biomecánica  
Es un texto de investigación que está dividido en cuatro capítulos, donde se presentan generalidades del análisis de datos funcionales y la biomecánica empezando con una introducción de la técnica FDA para el análisis de datos determinados del ciclo de caminar del ser humano. Se describe una breve nota histórica y alguna terminología necesaria descrita en un glosario sucinto de biomecánica. Luego, se desarrolla una descripción matemática de datos biomecánicos, que aparecen de la cinemática de la posición angular durante el ciclo de caminar; y se presenta las principales técnicas de FDA que se pueden aplicar a los datos biomecánicos, que toman en cuenta ruido en las señales recopiladas de las trayectorias de los marcadores colocados en las extremidades inferiores. Finalmente, se toma en cuenta una introducción a cada trabajo académico de referencia del tema, dejando claro cuál es el objetivo, qué tipo de datos biomecánicos se analizan y qué técnicas del FDA se usan para alcanzar los resultados de cada publicación científica.

**Miriam Francisca Ortega Gutiérrez.** Doctora en Matemática, graduada en la ESPOCH- ECUADOR. Ex docente de las universidades UTPL y UNL. Máster en Estadística Aplicada en la UGR Granada-España.

**Jorge Washington Conchaga Aushay** Doctor en Matemática, graduado en la ESPOCH- ECUADOR. Estudió en la Università di Pavia - Italia. Máster Universitario en Estadística Aplicada en UGR, Granada-España.



ISBN: 978-9942-42-645-1

